解析力学ノート

Palais Blanc

2022 年 11 月 26 日

目次

1 準備 **2**
1.1 ベクトル場 2
1.2 微分形式 4
1.3 計量と接続 5

2 シンプレクティック幾何学 **7**
2.1 シンプレクティック線型空間 7
2.2 シンプレクティック多様体 7
2.3 シンプレクティック多様体の例 10

3 解析力学 **13**
3.1 Hamilton 形式 13
3.2 Legendre 変換 14
3.3 Lagrange 形式 17

1　準備

この節では, 多様体やバンドルについては既知と仮定し, ベクトル場や微分形式といった言葉を証明なしで復習する. 詳しい解説は, 多様体の本 (例えば志賀 [1]) に譲ることにする.

1.1　ベクトル場

M を滑らかな多様体, TM を M の接バンドルとする.

定義 1.1. TM の滑らかな切断面をベクトル場という.

M 上の滑らかな関数全体を $\mathrm{C}^\infty(M)$ で表し, M 上のベクトル場の全体を $\mathcal{X}(M)$ で表す. すると $\mathcal{X}(M)$ は $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群の構造をもつ.

命題 1.2. X を $\mathrm{C}^\infty(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への写像とする. X が次の条件を満たせば, X は M 上のベクトル場を定める.

(i) X は $\mathbb{R}$ 線型写像.
(ii) 任意の $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, 次が成り立つ.

$$X(fg) = f \cdot X(g) + X(f) \cdot g. \tag{1.1}$$

局所座標 (U, x^i) を使ってベクトル場を表すことを考えよう. まず, $\mathrm{C}^\infty(U)$ から $\mathrm{C}^\infty(U)$ への写像

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{1.2}$$

は, 命題 1.2 よりベクトル場である. すると, 任意のベクトル場 X は $X^i = X(x^i)$ とおくことにより, 次の形に書ける.

$$X|_U = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.3}$$

また, 別の局所座標 $(\bar{U}, \bar{x}^i)$ を取り,

$$X|_{\bar{U}} = \sum_j \bar{X}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \tag{1.4}$$

と表現されるならば, $U \cap \bar{U}$ 上で局所座標変数 x^i と $\bar{x}^j$ との間の座標変換則は,

$$\bar{X}^j = \sum_i X^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \tag{1.5}$$

となる.

定義 1.3. M 上のベクトル場 X および Y に対し, $\mathrm{C}^\infty(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への写像

$$f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{1.6}$$

は命題 1.2 よりベクトル場を定める. これを X と Y の括弧積といい $[X, Y]$ で表す.

括弧積により $\mathcal{X}(M)$ 上には Lie 環の構造が入る.

定義 1.4. $\mathbb{R} \times M$ から M への滑らかな写像 $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ が, 次の 2 つの条件を満たすとき, φ を M 上の 1 パラメータ変換群という.

(i) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して, φ_t は M から M への滑らかな同相写像を与えている.
(ii) 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し, $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

注意 1.5. 定義 1.4 (ii) から $t = s = 0$ と置くことにより, φ_0 は M から M への恒等写像であることが分かる.

1 パラメータ変換群はベクトル場を定める. 即ち, 次が成立する.

命題 1.6. φ を M 上の 1 パラメータ変換群とする. $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し $X(f) \in \mathrm{C}^\infty(M)$ を

$$X(f)(x) = \lim_{s \to 0} \frac{f(\varphi_s(x)) - f(x)}{s} \tag{1.7}$$

で定める. このとき, f に $X(f)$ を対応させる写像 X はベクトル場である.

逆に, M 上のベクトル場 X が与えられたとき, 式 (1.7) を満たす M 上の 1 パラメータ変換群が必ず存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば一意に定まる.

定義 1.7. M 上のベクトル場 X が完備であるとは, 式 (1.7) を満たす 1 パラメータ変換群 φ が存在するときをいう. また, この 1 パラメータ変換群を $\exp(tX)$ と書く.

ベクトル場 X と 1 パラメータ変換群 φ との関係を局所座標 (U, x^i) を使って表そう. M の次元を n とする. 式 (1.7) の x に $\varphi_t(x)$ を代入することにより,

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\varphi_{t+s}(x)) - f(\varphi_t(x))}{s} = (X(f))(\varphi_t(x)) \tag{1.8}$$

を得る. $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$ を固定し, $\varphi_t(x) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ とし, さらに $f(x) := x^i$ とおく. すると,

$$\begin{aligned} (\text{式 (1.8) の左辺}) &= \lim_{s \to 0} \frac{x^i(t+s) - x^i(t)}{s} \\ &= \frac{dx^i(t)}{dt}, \\ (\text{式 (1.8) の右辺}) &= X^i(\varphi_t(x)) \\ &= X^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{aligned} \tag{1.9}$$

となる. また, 注意 1.5 より, $x^i(0) = x^i$ が成り立つ. よって, 次の結果を得る.

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i(t)}{dt} = X^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \\ x^i(0) = x^i, \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{1.10}$$

ベクトル場 $X|_U$ から 1 パラメータ変換群 $\exp(tX|_U)$ を求めるには, $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ を未知関数とする微分方程式 (1.10) を解けばよい.

1.2 微分形式

T^*M で M の余接バンドルを表す.

定義 1.8. T^*M の滑らかな切断面を 1 次微分形式という. M 上の 1 次微分形式全体を $\Omega^1(M)$ で表す.

$\Omega^1(M)$ は, $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群の構造をもつ. さらに, 1 次微分形式は次のように特徴づけられる.

命題 1.9. 1 次微分形式は, $\mathcal{X}(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群としての準同型写像と同一視できる.

1 次微分形式 α を局所座標 (U, x^i) で表そう. 1 次微分形式 dx^i を (1.2) で定義したベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ の双対元とする. すると, 一般の 1 次微分形式 α は

$$\alpha_i = \alpha|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{1.11}$$

とおくことにより, 次のように表される.

$$\alpha|_U = \sum_i \alpha_i dx^i. \tag{1.12}$$

別の局所座標 $(\bar{U}, \bar{x}^j)$ によって,

$$\alpha|_{\bar{U}} = \sum_j \bar{\alpha}_j d\bar{x}^j \tag{1.13}$$

の形に表されているとすれば, $U \cap \bar{U}$ 上で, 関係式

$$\bar{\alpha}_j = \sum_i \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \tag{1.14}$$

が成り立つ.

次に, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ を微分することを考えよう.

定義 1.10. $\mathcal{X}(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への写像

$$df : X \mapsto X(f) \tag{1.15}$$

は, 命題 1.9 により 1 次微分形式を定める. df を f の微分という.

df は, 局所座標 (U, x^i) によって, 次のように書ける.

$$df|_U = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{1.16}$$

T^*M の k 次外積バンドルを $\bigwedge^k T^*M$ で表す.

定義 1.11. $\bigwedge^k T^*M$ の滑らかな切断面を k 次微分形式という.

M 上の k 次微分形式全体を $\Omega^k(M)$ で表す. 但し, $k = 0$ の場合は $\Omega^0(M) := \mathrm{C}^\infty(M)$ と約束する.

外積バンドル $\bigwedge^k T^*M$ の定義より, M の各局所座標 (U, x^i) 上で

$$\Omega^k(U) = \bigwedge_{\mathrm{C}^\infty(U)}^{k} \Omega^1(U) \tag{1.17}$$

が成り立つ.

定義 1.12. 次の条件を満たす, $\Omega^k(M)$ から $\Omega^{k+1}(M)$ への $\mathbb{R}$ 線型写像 d が一意に存在する. d を外微分という.

(i) $f \in \Omega^0(M)$ ならば, df は定義 1.10 の意味での f の微分である.
(ii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば, $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$.
(iii) $d \circ d = 0$.

定義 1.13. X を M 上のベクトル場とする. このとき, 次の条件をみたす $\Omega^k(M)$ 上の $\mathbb{R}$ 線型変換 L_X が一意に存在する. L_X を X による Lie 微分という.

(i) $f \in \Omega^0(M)$ ならば $L_X f = X(f)$.
(ii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta)$.
(iii) $f \in \Omega^0(M)$ ならば $L_X df = d(X(f))$.

定義 1.14. X を M 上のベクトル場とする. このとき, 次の条件を満たす, $\Omega^k(M)$ から $\Omega^{k-1}(M)$ への $\mathbb{R}$ 線型写像 ι_X が一意に存在する. ι_X を X による内部積という.

(i) $f \in \Omega^0(M)$ ならば, $\iota_X f = 0$.
(ii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta)$.
(iii) $f \in \Omega^0(M)$ ならば, $\iota_X df = X(f)$.

命題 1.15. $\alpha \in \Omega^k(M)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $L_X \circ d\alpha = d \circ L_X \alpha$.
(ii) $L_X \alpha = \iota_X \circ d\alpha + d \circ \iota_X \alpha$.

1.3 計量と接続

M を滑らかな多様体, TM を M の接バンドルとする.

定義 1.16. 接バンドル TM 上の滑らかで正値な計量 g を Riemann 計量と呼ぶ. Riemann 計量 g が付随した多様体 (M, g) を Riemann 多様体と呼ぶ.

局所座標 (U, x^i) をひとつ選ぶ. このとき

$$g_{ij}(x) := g|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{1.18}$$

と置くと,

$$g|_U = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx^i dx^j \text{ かつ } g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \tag{1.19}$$

と書くことができる．但し, 各点 $x \in U$ に対し, 正方行列 $(g_{ij}(x))_{ij}$ は正値な対称正則行列で, さらに各添字 ij に対し $x \mapsto g_{ij}(x)$ は滑らかな関数である．

次に, Riemann 多様体 (M, g) 上を運動する質点について考えよう．I を $\mathbb{R}$ の開区間, 滑らかな写像 $\alpha : I \to M$ を質点の運動とする．時刻 $t \in I$ に対し, M 上の点 $\alpha(t)$ は質点の位置を表す．さらに,

$$\frac{d\alpha}{dt} := \sum_i \frac{d\alpha^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.20}$$

を質点の速度と呼ぶ．$d\alpha/dt$ は, I 上のバンドル $I \times_M TM$ の切断である．また, 速度の大きさ $\sqrt{g(d\alpha/dt, d\alpha/dt)}$ を速さと呼ぶ．速度が 0 であることと, 速さが 0 であることとは同値である．

加速度を考えるには, 次の接続の概念を必要とする．

定義 1.17. M を滑らかな多様体とする．このとき双線形写像 $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ が次の 2 つの条件を満たすとき, ∇ を M 上の接続という．

(i) 任意の $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, $\nabla_X(fY) = (X(f))Y + f\nabla_X Y$.
(ii) 任意の $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, $\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$.

局所座標 (U, x^i) を使って, 接続を表示すると,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.21}$$

と書ける．$\{\Gamma_{ij}^k(x)\}_{ijk}$ を接続係数または Christoffel シンボルと呼ぶ．

定理 1.18. (M, g) を Riemann 多様体とする．このとき, 次の 2 つの条件を満たす接続 ∇ が一意的に存在する．

(i) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対し, $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.
(ii) 任意の $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対し, $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$.

この接続 ∇ を Levi-Civita 接続という．

Levi-Civita 接続の接続係数は, 局所座標 (U, x^i) を用いて次の式で表される．

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \tag{1.22}$$

定義 1.19. (M, g) を Riemann 多様体, ∇ を Levi-Civita 接続, $\alpha : I \to M$ を滑らかな物体の運動とする．このとき, α の加速度を

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} \frac{d\alpha}{dt} := \sum_k \left(\frac{d^2\alpha^k(t)}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) \frac{d\alpha^i(t)}{dt} \frac{d\alpha^j(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.23}$$

で定義する．

α の加速度が 0 であることと, 任意の添字 k に対し

$$\frac{d^2\alpha^k(t)}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) \frac{d\alpha^i(t)}{dt} \frac{d\alpha^j(t)}{dt} = 0 \tag{1.24}$$

が成り立つこととは同値である．

2　シンプレクティック幾何学

この節では, シンプレクティック幾何学の初歩を紹介する. 勾配作用素 grad や Poisson 積の定義と性質を調べる. また, 多様体 M の余接バンドル T^*M には自然なシンプレクティック構造が入ることを証明し, 解析力学の理論を展開するための準備を行う.

2.1　シンプレクティック線型空間

V を有限次元 $\mathbb{R}$ 線型空間とする.

定義 2.1. ω を $V \times V$ から $\mathbb{R}$ への $\mathbb{R}$ 双線型写像とする.

(i) ω が交代的であるとは,

$$\omega(y, x) = -\omega(x, y) \tag{2.1}$$

が任意の x, $y \in V$ に対して成り立つときをいう.

(ii) ω が非退化であるとは,

$$(\text{任意の } x \in V \text{ に対し}, \omega(x, y) = 0) \Longrightarrow y = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つときをいう.

定義 2.2. $\mathbb{R}$ 双線形写像 $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ が定義 2.1 の (i) と (ii) を満たすとき, ω をシンプレクティック形式と呼ぶ. シンプレクティック形式 ω が付随した線形空間 V をシンプレクティック線型空間という.

定理 2.3. シンプレクティック線形空間 (V, ω) の次元は偶数である.

証明. V の次元を n とする. V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ をひとつ取ってくる. ここで,

$$\omega_{ij} := \omega(e_i, e_j) \tag{2.3}$$

とおくと, n 次正方行列 $A := (\omega_{ij})_{ij}$ が定義される. このとき, ω が交代的であることとから ${}^tA = -A$ が成り立ち, ω が非退化であることから A は正則である. したがって, 次が成り立つ.

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A). \tag{2.4}$$

ここで, もし n が奇数であるとすると, 式 (2.4) より $\det(A) = 0$ でなければならないが, これは A が正則行列であることと矛盾する. □

2.2　シンプレクティック多様体

M を滑らかな多様体とする.

定義 2.4. M 上の 2 次微分形式 ω が, 次の 2 つの条件を満たすとき, ω を M のシンプレクティック構造, (M, ω) をシンプレクティック多様体という.

(i) 接バンドル TM の各ファイバー T_xM 上で, ω_x は T_xM のシンプレクティック形式を与える.

(ii) ω は閉形式である. すなわち $d\omega = 0$.

定理 2.5. シンプレクティック多様体 (M, ω) の次元は偶数である.

証明. M の次元を n とする. 定義 2.4 (i) より, 各 $x \in M$ に対し (T_xM, ω_x) は n 次元のシンプレクティック線形空間である. よって, 定理 2.3 より n は偶数である. □

ω を局所座標 (U, x^i) を使って表してみよう.

$$\omega_{ij} := \omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{2.5}$$

とおけば

$$\omega|_U = \sum_{ij} \frac{\omega_{ij}}{2} dx^i \wedge dx^j \text{ かつ } \omega_{ji} = -\omega_{ij} \tag{2.6}$$

と書ける.

2 次微分形式 ω がシンプレクティック構造となるための条件を成分 ω_{ij} で特徴づけよう.

補題 2.6. 2 次微分形式 ω を式 (2.6) の形に表しておく. そのとき, 次が成り立つ.

(i) 各ファイバー T_xM 上で ω_x がシンプレクティック形式であることと, 行列 $(\omega_{ij})_{ij}$ が正則な交代行列であることとは同値である.

(ii) ω が閉形式であることと

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0 \tag{2.7}$$

が任意の添え字 ijk に対して成立することとは同値である.

証明. (i) は明らか. (ii) について確かめよう. 式 (2.6) より実際に $d\omega$ を局所座標を用いて表せば,

$$d\omega|_U = \frac{1}{2} \sum_{ijk} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \tag{2.8}$$

と書ける. したがって $d\omega|_U = 0$ なる条件は, 任意の添え字 ijk に対し,

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} = 0 \tag{2.9}$$

である. $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ であるから, 式 (2.7) を得る. □

補題 2.7. $\mathcal{X}(M)$ から $\Omega^1(M)$ への写像 $X \mapsto \iota_X \omega$ は $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群としての同型写像である.

証明. 局所座標 (U, x^i) をとり, $\omega|_U$ を式 (2.6) と表し, $X|_U$ を式 (1.3) と表しておく. すると,

$$\begin{aligned} \iota_X \omega|_U &= \sum_{ij} \frac{\omega_{ij}}{2} \iota_{X|_U} (dx^i \wedge dx^j) \\ &= \sum_{ij} \frac{\omega_{ij}}{2} (X^i dx^j - X^j dx^i) \\ &= \sum_j \left(\sum_i \omega_{ij} X^i \right) dx^j \end{aligned} \tag{2.10}$$

が得られる. $(\omega_{ij})_{ij}$ は補題 2.6 より正則なので, X を $\iota_X\omega$ に対応させる写像は同型である. □

定義 2.8. 補題 2.7 により, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, 以下の等式を満たすベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ が一意に存在する.

$$df = \iota_X\omega. \tag{2.11}$$

この X を f の勾配といい, $\operatorname{grad} f$ で表す.

注意 2.9. grad は $\mathrm{C}^\infty(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への $\mathbb{R}$ 線形写像であり, シンプレクティック構造 ω に依存する.

$f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, 勾配 $\operatorname{grad} f$ を局所座標 (U, x^i) で表してみよう.

$$\operatorname{grad} f|_U = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.12}$$

とおく. $\omega|_U$ を式 (2.6) の形に表示しておく. すると, 等式 (2.11) は補題 2.7 より

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \sum_j \left(\sum_i \omega_{ij} X^i \right) dx^j \tag{2.13}$$

と書ける. したがって, 任意の添字 j に対し

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_i \omega_{ij} X^i \tag{2.14}$$

が成り立つ. $(\omega_{ij})_{ij}$ の逆行列を $(\omega^{ij})_{ij}$ とおく. すると,

$$\begin{aligned} \sum_j \omega^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} &= \sum_j \omega^{jk} \sum_i \omega_{ij} X^i \\ &= \sum_i \left(\sum_j \omega_{ij}\omega^{jk} \right) X^i \\ &= X^k \end{aligned} \tag{2.15}$$

となる. よって

$$\operatorname{grad} f|_U = \sum_k \left(\sum_j \omega^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.16}$$

が成り立つ.

定義 2.10. f, $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し,

$$\{f, g\} := (\operatorname{grad} f)(g) \tag{2.17}$$

とおく. これを f と g の Poisson 積という.

M の局所座標 (U, x^i) をとり, ω を式 (2.6) の形に表示しておく. すると, Poisson 積は式 (2.16) から

$$\{f, g\}|_U = \sum_{ij} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \tag{2.18}$$

と書ける. 但し, $(\omega^{ij})_{ij}$ は $(\omega_{ij})_{ij}$ の逆行列である.

定理 2.11. Poisson 積は $\mathbb{R}$ 双線型写像であり, さらに次の性質を満たす.

(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
(ii) $\{f, gh\} = \{f, g\}\, h + g\, \{f, h\}$.
(iii) $\{h, \{f, g\}\} + \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$.

証明. (i) 局所座標 (U, x^i) をとり, ω を式 (2.6) の形で表しておく. $(\omega_{ij})_{ij}$ は正則な交代行列であるから逆行列 $(\omega^{ij})_{ij}$ も交代行列である. つまり $\omega^{ji} = -\omega^{ij}$ が成り立つ. よって, 式 (2.18) より

$$\begin{aligned} \{f, g\}\,|_U &= \sum_{ij} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \\ &= -\sum_{ij} \omega^{ji} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= -\{g, f\}\,|_U. \end{aligned} \tag{2.19}$$

(ii) Poisson 積の定義より,

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= (\operatorname{grad} f)(gh) \\ &= (\operatorname{grad} f)(g)h + g(\operatorname{grad} f)(h) \\ &= \{f, g\}\, h + g\, \{f, h\}\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

(iii) 局所座標 (U, x^i) をとる. 式 (2.18) より,

$$\{h, \{f, g\}\}\,|_U + \{f, \{g, h\}\}\,|_U + \{g, \{h, f\}\}\,|_U \tag{2.21}$$

$$= \sum_{ijk} \left(\sum_p \omega^{kp} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial x^p} + \sum_q \omega^{iq} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial x^q} + \sum_r \omega^{jr} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial x^r} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^k} \tag{2.22}$$

$$= \sum_{ijk} \sum_{pqr} \omega^{kp} \omega^{iq} \omega^{jr} \left(\frac{\partial \omega_{qr}}{\partial x^p} + \frac{\partial \omega_{rp}}{\partial x^q} + \frac{\partial \omega_{pq}}{\partial x^r} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^k} \tag{2.23}$$

となる. 等式 (2.23) は, 逆行列の微分公式

$$\frac{\partial \omega^{ij}}{\partial x^p} = -\sum_{qr} \omega^{iq} \frac{\partial \omega_{qr}}{\partial x^p} \omega^{rj} \tag{2.24}$$

から従う. 補題 2.6 の式 (2.7) より, 和 (2.23) は 0 である.

□

2.3 シンプレクティック多様体の例

M を滑らかな m 次元多様体とする. このとき, 余接バンドル T^*M は滑らかな $2m$ 次元多様体であり, T^*M には次のように自然なシンプレクティック構造を入れることが出来る.

(U, x^i) を M の局所座標 とし, 点 $x = (x^1, \ldots, x^m) \in U \subset M$ をとる. 余接ベクトル $p_x \in T_x^*M$ は,

$$p_x = \sum_i p_i (dx^i)_x \tag{2.25}$$

と書けるから, T_x^*M は座標 $(p_1, \ldots, p_m)$ をもつ. 従って, T^*M に局所座標 (T^*U, x^i, p_i) が定義される. この座標を (U, x^i) の誘導座標という.

この誘導座標 (T^*U, x^i, p_i) を使って, 1 次微分形式 $\sigma \in \Omega^1(T^*M)$ を

$$\sigma|_{T^*U} := \sum_i p_i dx^i \tag{2.26}$$

と定義する. σ が, 局所座標のとり方によらず, 大域的に定義出来ることを示そう.

命題 2.12. σ は局所座標 (U, x^i) の誘導座標 (T^*U, x^i, p_i) の取り方によらない.

証明. M に別の局所座標 $(\bar{U}, \bar{x}^i)$ を取り, その誘導座標を $(T^*\bar{U}, \bar{x}^i, \bar{p}_i)$ とおく. このとき, 余接バンドル T^*M の定義により

$$\bar{p}_j = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} p_i \tag{2.27}$$

なる関係がある. したがって,

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{p}_j d\bar{x}^j &= \sum_j \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} p_i \sum_k \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k \\ &= \sum_i p_i dx^i \end{aligned} \tag{2.28}$$

が成り立つ. これは式 (2.26) による定義が座標変換と well-defined であることを示している. □

$\omega \in \Omega^2(T^*M)$ を $\omega := d\sigma$ で定義する. すると, 次が成り立つ.

命題 2.13. ω は T^*M 上のシンプレクティック構造を定める.

証明. まず, ω が閉形式であることは, 外微分の性質より, $d\omega = d \circ d\sigma = 0$ となることからわかる. 次に, ω が非退化であることを示そう. M の局所座標 (U, x^i) の誘導座標 (T^*U, x^i, p_i) を用いて

$$\omega|_{T^*U} = \sum_i dp_i \wedge dx^i \tag{2.29}$$

$$= \sum_i \left(-\frac{1}{2} dx^i \wedge dp_i + \frac{1}{2} dp_i \wedge dx^i \right) \tag{2.30}$$

と書けるから, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0, \\ &\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \begin{cases} -1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \\ &\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \begin{cases} +1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \\ &\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0, \qquad (i, j = 1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{2.31}$$

この結果から, ω は非退化である. □

以上により, (T^*M, ω) はシンプレクティック多様体になることがわかった. (T^*M, ω) を標準的なシンプレクティック多様体という.

最後に, (T^*M, ω) 上での勾配と Poisson 積についてまとめておこう. (U, x^i) を M の局所座標, (T^*U, x^i, p_i) を誘導座標とする. すると, 式 (2.31) から,

$$\begin{aligned}
&\omega^{-1}(dx^i, dx^j) = 0, \\
&\omega^{-1}(dx^i, dp_j) = \begin{cases} +1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \\
&\omega^{-1}(dp_i, dx^j) = \begin{cases} -1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \\
&\omega^{-1}(dp_i, dp_j) = 0, \qquad (i, j = 1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

が成り立つ. よって, $f \in \mathrm{C}^\infty(T^*M)$ の勾配は

$$\operatorname{grad} f|_{T^*U} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{2.33}$$

となる. また, f, $g \in \mathrm{C}^\infty(T^*M)$ に対し, Poisson 積は

$$\{f, g\}|_{T^*U} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) \tag{2.34}$$

となる.

3　解析力学

この節では, 前節で導入したシンプレクティック幾何学を使って解析力学の理論を展開する. はじめに Hamilton 形式では, 一般のシンプレクティック多様体を相空間と見なして, 解析力学の公理である, 状態, 物理量, 時間発展なる概念を導入し, 質点の運動の性質を調べる.

次の Legendre 変換では, 配置空間上の実数値関数から相空間上の実数値関数を構成する手順を学ぶ.

最後の Lagrange 形式では, Riemann 多様体内を運動する質点の解析を行う. 配置空間上の実数値関数であるラグランジアンから Legendre 変換を行なってハミルトニアンを構成し, 運動方程式を得る. 応用として, 運動量保存や角運動量保存についての議論を行う.

3.1　Hamilton 形式

解析力学を数学的に記述してみよう. シンプレクティック多様体 (M, ω) を 1 つ固定する.

定義 3.1. M の点 $x \in M$ を状態という.

定義 3.2. 関数 $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ のことを M 上の物理量という. また, 状態 $x \in M$ が与えられたとき, 値 $f(x)$ を状態 x における物理量 f の観測値という.

ここで, ハミルトニアンと呼ばれる物理量 $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$ を考え, ひとつ固定する. さらに, h の勾配 $\operatorname{grad} h$ は完備と仮定する.

定義 3.3. $\operatorname{grad} h$ の 1 パラメータ変換群 $(t, x) \mapsto \exp(t \operatorname{grad} h)(x)$ を時間発展という. 時刻 0 の 状態を $x \in M$ とするとき, $\exp(t \operatorname{grad} h)(x) \in M$ を 時刻 t における状態 x の時間発展という.

例 3.4. 時間発展を求める微分方程式を書き下してみよう. M の次元を n, M の局所座標を (U, x^i), ω を式 (2.6) の形で書き表しておく. さらに $(\omega_{ij})_{ij}$ の逆行列を $(\omega^{ij})_{ij}$ とする. すると, ハミルトニアン h の勾配は, 式 (2.16) より

$$\operatorname{grad} h|_U = \sum_j \left(\sum_i \omega^{ij}(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{3.1}$$

となる. よって $\operatorname{grad} h$ から決まる 1 パラメータ変換群 $\exp(t \operatorname{grad} h)(x) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ の満たす微分方程式は式 (1.10) より

$$\begin{cases} \dfrac{dx^j(t)}{dt} = \displaystyle\sum_i \omega^{ij}(x(t)) \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x^i} \right|_{x=x(t)}, \\ x^j(0) = x^j, \qquad\qquad (j = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.2}$$

となる.

物理で重要な保存量について議論しよう.

定義 3.5. 物理量 $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ が保存量であるとは, 任意の状態 $x \in M$ に対し, 関数 $t \mapsto f(\exp(t \operatorname{grad} h)(x))$ が定数関数であるときをいう.

次の補題は保存量を特徴づける.

補題 3.6. f, $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ とし, $\operatorname{grad} g$ は完備とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f \circ \exp(t \operatorname{grad} g) = f$.
(ii) $\{g, f\} = 0$.

証明. 定義 2.10 より,

$$\begin{aligned} \{g, f\}(x) &= ((\operatorname{grad} g)(f))(x) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(\exp(s \operatorname{grad} g)(x)) - f(x)}{s} \end{aligned} \tag{3.3}$$

が成り立つ. 式 (3.3) の x に $\exp(t \operatorname{grad} g)(x)$ を代入すれば,

$$\begin{aligned} &\{g, f\}(\exp(t \operatorname{grad} g)(x)) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(\exp((t+s) \operatorname{grad} g)(x)) - f(\exp(t \operatorname{grad} g)(x))}{s} \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る. 右辺は関数 $t \mapsto f(\exp(t \operatorname{grad} g)(x))$ の導関数になっていることに注意すれば, (i) と (ii) が同値であることがわかる. □

命題 3.7. f を物理量とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

(i) f は保存量である.
(ii) $\{h, f\} = 0$.

証明. 補題 3.6 の直接の結果である. □

系 3.8. ハミルトニアン h は保存量である.

証明. $\{h, h\} = 0$ と命題 3.7 より従う. □

定義 3.9. $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ を物理量とし, その勾配 $\operatorname{grad} f$ は完備と仮定する. このとき $\operatorname{grad} f$ の 1 パラメータ変換群 $(t, x) \mapsto \exp(t \operatorname{grad} f)(x)$ を f の相流という.

定理 3.10 (Noether)**.** f を物理量とし, その勾配 $\operatorname{grad} f$ は完備であると仮定する. このとき, 次の 2 つの命題は同値である.

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $h \circ \exp(t \operatorname{grad} f) = h$.
(ii) f は保存量である.

証明. 補題 3.6 より, (i) が成り立つことと $\{f, h\} = 0$ が成り立つこととは同値である. そして, 命題 3.7 より $\{h, f\} = 0$ と (ii) は同値である. $\{h, f\} = -\{f, h\}$ に注意すれば, (i) と (ii) は同値である. □

3.2 Legendre 変換

V を $\mathbb{R}$ 線型空間, U を V の連結開集合とする. ここで, U 上定義された滑らかな関数 f を考える.

定義 3.11. f が正則性条件を満たすとは, f の全微分

$$Df : U \to V^* \tag{3.5}$$

が U から V^* の中への微分同相写像になるときをいう. 即ち, $U^* := Df(U)$ とおくと U^* は V^* の開集合で Df が U から U^* への微分同相写像を与えるときをいう.

定義 3.12. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ を V と V^* の対写像とし, 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が正則性条件を満たすと仮定する. $F : U \times U^* \to \mathbb{R}$ を

$$F(v, p) := \langle v, p \rangle - f(v) \tag{3.6}$$

で定める. このとき,

$$f^*(p) := F((Df)^{-1}(p), p) \tag{3.7}$$

は U^* から $\mathbb{R}$ への滑らかな写像となる. この f^* を f の Legendre 変換という.

命題 3.13. 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が正則性条件を満たすと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(i) $f^* : U^* \to \mathbb{R}$ も正則性条件を満たす.
(ii) $f^{**} = f$.

証明. まず, (i) を示す. F の全微分は

$$(DF)(v, p) = (p - (Df)(v), v) \tag{3.8}$$

であるから,

$$\begin{aligned}(Df^*)(p) &= (DF)((Df)^{-1}(p), p) \begin{pmatrix} D((Df)^{-1})(p) \\ \mathrm{id}_{V^*} \end{pmatrix} \\ &= (Df)^{-1}(p).\end{aligned} \tag{3.9}$$

が成り立つ. これは Df^* が Df の逆写像であることを示している. ゆえに, Df^* は U^* から U への微分同相写像, 即ち, f^* も正則性条件を満たす.

次に, (ii) を示そう. Legendre 変換の定義により,

$$\begin{aligned}f^{**}(v) &= \langle v, (Df^*)^{-1}(v) \rangle - f^*((Df^*)^{-1}(v)) \\ &= \langle v, (Df)(v) \rangle - f^*((Df)(v)) \\ &= \langle v, (Df)(v) \rangle - \langle v, (Df)(v) \rangle + f(v) \\ &= f(v).\end{aligned} \tag{3.10}$$

□

Legendre 変換の具体例を一つ挙げておく.

例 3.14. g を V の非退化な計量, a を V^* の元, c を定数とする. このとき, V 上の関数

$$f(v) = \frac{1}{2} g(v, v) + a(v) + c \tag{3.11}$$

の Legendre 変換を求めてみよう．まず, V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とその双対基底 $\{e^1, \ldots, e^n\}$ をひとつ選び固定する．これらの基底を使って

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= g(e_i, e_j), \\ v &= \sum_i v^i e_i, \\ a &= \sum_i a_i e^i, \\ p &= \sum_i p_i e^i \end{aligned} \tag{3.12}$$

と表示しておく．すると f は

$$f(v) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij} v^i v^j + \sum_k a_k v_k + c \tag{3.13}$$

と書ける．f を全微分すると,

$$Df(v)_j = \sum_i g_{ij} v^i + a_j \tag{3.14}$$

となる．g は非退化なので $(g_{ij})_{ij}$ は正則行列である．よって Df はアフィン写像でしかも全単射であるから, 特に V から V^* への微分同相でもある．従って, f は正則性条件を満たすことが分かった．式 (3.14) より $p = Df(v)$ を逆に解くと

$$v^i = \sum_j g^{ij}(p_j - a_j) \tag{3.15}$$

となる．ただし, $(g^{ij})_{ij}$ は $(g_{ij})_{ij}$ の逆行列である．ゆえに, f の Legendre 変換は定義 3.12 より

$$f^*(p) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g^{ij}(p_i - a_i)(p_j - a_j) - c \tag{3.16}$$

となる．また, $(g^{ij})_{ij}$ は V^* 上の非退化な計量と思えるから, その計量を g^{-1} とおけば

$$f^*(p) = \frac{1}{2} g^{-1}(p - a, p - a) - c \tag{3.17}$$

と書くこともできる．

M を多様体, E を M 上のベクトルバンドルとする．

定義 3.15. U を E の開集合, f を U から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数とする．

(i) f が正則性条件を満たすとは, 各 $x \in M$ のファイバー E_x に f を制限したもの $f|_{E_x}$ が定義 3.11 の意味で正則性条件を満たすものをいう．

(ii) E^* を E の双対バンドルとし, $f : U \to \mathbb{R}$ が正則性条件を満たすと仮定する．各 $x \in M$ に対し $f|_{E_x}$ の Legendre 変換を考えることにより, E^* のある開集合から $\mathbb{R}$ への関数 f^* で $f^*|_{E_x^*} = (f|_{E_x})^*$ を満たすものが一つ定まる．これも f の Legendre 変換という．

3.3 Lagrange 形式

配置空間と呼ばれる滑らかな m 次元多様体 M が与えられているとする. M の余接バンドル T^*M には, 標準的なシンプレクティック構造 ω を入れておく.

定義 3.16. (i) TM の開集合 U から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数 f が定義 3.15 の意味で正則性条件を満たすと仮定する. このとき, $f : U \to \mathbb{R}$ を配置空間 M のラグランジアンという.

(ii) f の Legendre 変換 を施すと T^*M のある開集合 U^* から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数 f^* が得られる. f^* はシンプレクティック多様体 (T^*M, ω) を U^* に制限したもの $(U^*, \omega|_{U^*})$ 上の物理量と見なせる. f^* を f から誘導されたハミルトニアンという.

$f^* : T^*M \to \mathbb{R}$ をハミルトニアンとし, f^* は完備であると仮定する. (U, x^i) を M の局所座標, (T^*U, x^i, p_i) を誘導座標とする. T^*U 上でハミルトニアンが $f^*(x,p)$ のときの時間発展 $(x(t), p(t))$ の満たす微分方程式は, 式 (3.2) と式 (2.32) から

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i(t)}{dt} = \left.\dfrac{\partial f^*(x,p)}{\partial p_i}\right|_{\substack{x=x(t)\\p=p(t)}}, \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt} = -\left.\dfrac{\partial f^*(x,p)}{\partial x^i}\right|_{\substack{x=x(t)\\p=p(t)}}, \\ x^i(0) = x^i, \\ p_i(0) = p_i, \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{cases} \tag{3.18}$$

となる. この方程式を正準方程式という.

例 3.17. M を多様体, g を M の Riemann 計量とする. Riemann 多様体 (M, g) 内を質量 m_0 の 1 質点が運動する系を考えよう. 質点が何の作用を持たないときのラクランジアン $L : TM \to \mathbb{R}$ は

$$L(x, v_x) = \frac{1}{2} m_0 g(v_x, v_x) \tag{3.19}$$

となる. ただし $\left(x, v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \in TM$ である. x を一般化座標, v_x を一般化速度と呼ぶ. そして, L を Legendre 変換することによって得られるハミルトニアン $H : T^*M \to \mathbb{R}$ は例 3.14 より

$$H(x, p_x) = \frac{1}{2m_0} g^{-1}(p_x, p_x) \tag{3.20}$$

となる. ただし, g^{-1} は g から誘導される T^*M 上の計量であり, $(x, p_x\, dx) \in T^*M$ である. p_x を一般化運動量と呼ぶ.

時間発展 $(x(t), p(t))$ が満たす微分方程式を求めよう. 局所座標 (U, x^i) の誘導座標 (T^*U, x^i, p_i) を定めることにより, ハミルトニアン (3.20) は

$$H(x, p) = \frac{1}{2m_0} \sum_{jk} g^{jk}(x) p_j p_k \tag{3.21}$$

と書ける．式 (3.21) を式 (3.18) に当てはめることによって正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i(t)}{dt} = \left.\dfrac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}\right|_{\substack{x=x(t)\\ p=p(t)}}, \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\right|_{\substack{x=x(t)\\ p=p(t)}}, \\ x^i(0) = x^i, \\ p_i(0) = p_i, \qquad\qquad (i = 1, \ldots, m) \end{cases} \tag{3.22}$$

が得られる．

次になんの作用を持たない質点の運動を調べよう．式 (3.22) の右辺を計算すると

$$\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i} = \frac{1}{m_0}\sum_l g^{il}(x)p_l, \tag{3.23}$$

$$-\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i} = -\frac{1}{2m_0}\sum_{jk}\frac{\partial g^{jk}(x)}{\partial x^i}p_jp_k \tag{3.24}$$

$$= \frac{1}{2m_0}\sum_{jk}\sum_{qr} g^{jq}(x)\frac{\partial g_{qr}(x)}{\partial x^i}g^{rk}(x)p_jp_k \tag{3.25}$$

となる．よって式 (3.23) より

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{1}{m_0}\sum_l g^{il}(x(t))p_l(t) \tag{3.26}$$

が成り立つ．式 (3.26) を $p_l(t)$ について解けば

$$p_l(t) = m_0\sum_k g_{lk}(x(t))\frac{dx^k(t)}{dt} \tag{3.27}$$

を得る．さらに (3.25) に (3.27) を代入して p_j と p_k を消去すると

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \frac{m_0}{2}\sum_{jk}\left.\frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^i}\right|_{x=x(t)}\frac{dx^j(t)}{dt}\frac{dx^k(t)}{dt} \tag{3.28}$$

を得る．式 (3.26) の両辺を t で微分し，式 (3.27) と式 (3.28) を代入すると

$$\frac{d^2x^i(t)}{dt^2} = \frac{1}{m_0}\left(\sum_{jl}\left.\frac{\partial g^{il}(x)}{\partial x^j}\right|_{x=x(t)}\frac{dx^j(t)}{dt}p_l(t) + \sum_q g^{iq}(x(t))\frac{dp_q(t)}{dt}\right) \tag{3.29}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{jkq} g^{iq}(x(t))\left(2\left.\frac{\partial g_{qk}(x)}{\partial x^j}\right|_{x=x(t)} - \left.\frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^q}\right|_{x=x(t)}\right)\frac{dx^j(t)}{dt}\frac{dx^k(t)}{dt} \tag{3.30}$$

$$= -\sum_{jk}\Gamma^i_{jk}(x(t))\frac{dx^j(t)}{dt}\frac{dx^k(t)}{dt} \tag{3.31}$$

となる．ただし，

$$\Gamma^i_{jk}(x) := \frac{1}{2}\sum_q g^{iq}(x)\left(\frac{\partial g_{qj}(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{qk}(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^q}\right) \tag{3.32}$$

である．式 (1.24) より，式 (3.31) は質点の加速度が 0 であることを表している．つまり，なんの作用も持たない質点の運動の加速度は 0 である．

例 3.18. 質量 m_0, 電荷 Q の 1 個の質点が次のような作用を持つと仮定する.

(i) ポテンシャルと呼ばれる滑らかな関数 $P \in \mathrm{C}^\infty(M)$,
(ii) 電気スカラーポテンシャルと呼ばれる滑らかな関数 $\phi \in \mathrm{C}^\infty(M)$,
(iii) 磁気ベクトルポテンシャルと呼ばれる滑らかな 1 次微分形式 $A \in \Omega^1(M)$.

このときの (非相対論的な) ラグランジアンは

$$L(x, v_x) = \frac{1}{2} m_0 g(v_x, v_x) - P(x) + QA_x(v_x) - Q\phi(x) \tag{3.33}$$

で与えられる. よって, その Legendre 変換は例 3.14 より

$$H(x, p_x) = \frac{1}{2m_0} g^{-1}(p_x - QA_x, p_x - QA_x) + P(x) + Q\phi(x) \tag{3.34}$$

となる. これが (非相対論的な) ハミルトニアンである.

例 3.19. 1 次元 Euclid 空間を n 個の質点が運動する系を考える. 各質点の質量を $m_1, \ldots, m_n$, 位置座標を $x_1, \ldots, x_n$, 速度座標を $v_1, \ldots, v_n$ で表す. 各質点に保存力のみが働く系のラグランジアンは, あるポテンシャル関数 $P(x_1, \ldots, x_n)$ を使って,

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i)^2 - P(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.35}$$

と書ける. L から誘導されるハミルトニアンは

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (p_i)^2 + P(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.36}$$

となる. ただし, $p_1, \ldots, p_n$ は運動量座標である.

今,

$$T = \sum_i p_i \tag{3.37}$$

は一つの物理量を定める. これを全運動量という. この全運動量が保存量になるための条件を考えよう. T の相流を求める微分方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = \left.\dfrac{\partial T(x,p)}{\partial p_i}\right|_{\substack{x=x(t)\\ p=p(t)}}, \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt} = -\left.\dfrac{\partial T(x,p)}{\partial x_i}\right|_{\substack{x=x(t)\\ p=p(t)}}, \\ x_i(0) = x_i, \\ p_i(0) = p_i, \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.38}$$

となる. これを解くと,

$$\begin{cases} x_i(t) = t + x_i, \\ p_i(t) = p_i, \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.39}$$

を得る．したがって, Noether の定理 3.10 より T が保存することと, ポテンシャル関数 P が

$$P(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = P(x_1, \cdots, x_n) \tag{3.40}$$

なる等式を任意 $t \in \mathbb{R}$ に対して満たすこととは同値である．

ポテンシャル関数がこの条件を満たす例として, 系が 2 体相互作用で, 引力や斥力が質点の距離の差で書ける場合などがある．

例 3.20. 例 3.18 で空間が 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ の場合を考える．Euclid 計量は, $g = dx^2 + dy^2$ で与えられる．極座標 (r, θ) を

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{3.41}$$

で定義する．Euclid 計量 g を極座標で表現すると

$$g = dr^2 + r^2\, d\theta^2 \tag{3.42}$$

となる．今, 例 3.18 のように, ポテンシャル関数 P で表される系を考える．ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m_0(v_r^2 + r^2 v_\theta^2) - P(r, \theta) \tag{3.43}$$

となり, ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m_0}p_r^2 + \frac{1}{2m_0 r^2}p_\theta^2 + P(r, \theta) \tag{3.44}$$

である．p_θ を角運動量と呼ぶが, この物理量が保存量になるための条件を考えよう．p_θ の相流を計算すると,

$$\begin{cases} r(t) = r, \\ \theta(t) = t + \theta, \\ p_r(t) = p_r, \\ p_\theta(t) = p_\theta \end{cases} \tag{3.45}$$

となる．従って, Noether の定理 3.10 より, 角運動量が保存するための条件として

$$P(r, \theta(t)) = P(r, \theta) \tag{3.46}$$

を得る．例えば, ポテンシャル関数 P が r のみの関数のとき, 角運動量 p_θ は保存する．

参考文献

[1] 志賀 浩二, 多様体論, 岩波講座基礎数学, 岩波書店.

[2] V. I. Arnold (安藤 韶一・蟹江 幸博・丹羽 敏雄 訳), 古典力学の数学的方法, 岩波書店 (1980).

[3] 山本 義隆・中村 孔一, 解析力学 I・II, 朝倉物理学大系, 朝倉書店.