シュワルツ超関数の初歩の初歩

Palais Blanc

2025 年 1 月 10 日

目次

1　シュワルツ超関数

1.1　記号の説明

自然数の集合を $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ で表し、非負整数の集合を $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ で書き表す。

n を考えている空間 $\mathbb{R}^n$ の次元とするとき、$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 、$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ に対し、偏微分作用素を

$$\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{1.1}$$

で定める。但し、$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ である。また、$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ と定義する。

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とするとき、関数 $\varphi : U \to \mathbb{C}$ の台を

$$\operatorname{supp} \varphi := U \setminus \left\{ x \in U \,|\, x \text{ を含み } U \text{ に含まれる開近傍 } V \text{ が存在して } \varphi|_V = 0 \right\} \tag{1.2}$$

で定める。

1.2　試験関数の空間 $\mathcal{D}$ の定義

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対し、試験関数の空間 $\mathcal{D}(U)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{D}(U) := \left\{ \varphi : U \to \mathbb{C} \,|\, \varphi \text{ は } C^\infty\text{-級関数かつ } \operatorname{supp} \varphi \subset U \text{ はコンパクト} \right\} \tag{1.3}$$

定義より、$\mathcal{D}(U)$ は $\mathbb{C}$-線形空間である。$\varphi \in \mathcal{D}(U)$ および $m \in \mathbb{N}_0$ に対し、$\|\varphi\|_m$ を

$$\|\varphi\|_m := \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in U} |\partial_x^\alpha \varphi(x)| \tag{1.4}$$

で定義する。さらに、コンパクト集合 $K \subset U$ に対し、$\mathcal{D}_K(U)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{D}_K(U) := \{\varphi \in \mathcal{D}(U) \,|\, \operatorname{supp} \varphi \subset K\}. \tag{1.5}$$

$\mathcal{D}_K(U)$ は $\mathcal{D}(U)$ の線形部分空間である。

1.3　超関数の空間 $\mathcal{D}'$ の定義

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。線形写像 $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ に対し、連続性

$$\forall K \subset U \text{コンパクト}, \exists m \in \mathbb{N}_0, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(U), |T(\varphi)| \le C\|\varphi\|_m \tag{1.6}$$

を満たすものを超関数と呼ぶ。また、開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の超関数全体を $\mathcal{D}'(U)$ と書き、超関数の空間と呼ぶ。$\mathcal{D}'(U)$ は $\mathbb{C}$-線形空間である。

以後、$T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi \rangle$ と書くことにする。

1.4　デルタ関数

$U := \mathbb{R}^n$ とする。$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0) \tag{1.7}$$

で定義する。δ が $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ の元、即ち、超関数になることを確認しよう。線形性は明らかだから、連続性 (1.6) を示そう。$K \subset \mathbb{R}^n$ を任意のコンパクト集合をするとき、定数 $m = 0$、$C = 1$ とおくと、$\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ ならば、不等式

$$
\begin{aligned}
|\langle \delta, \varphi \rangle| &= |\varphi(0)| \\
&\leq \|\varphi\|_0
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これで、連続性が示された。

1.5 局所可積分関数の空間 L^1_{loc} の $\mathcal{D}'$ への埋め込み

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。局所可積分関数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ に対し、

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_U f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1.8}$$

と定義する。T_f が超関数であることを示そう。T_f が $\mathbb{C}$-線形写像であることは明らかだから、連続性 (1.6) を示せばよい。

$K \subset U$ を勝手なコンパクト集合とする。$m := 0$, $C := \int_K |f(x)|\,dx$ と置く。任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K(U)$ に対し、

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)|\,dx \tag{1.9}$$

となるが、

$$|\varphi(x)| \leq \sup_{x \in U} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_0 \tag{1.10}$$

なので、

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_0 \tag{1.11}$$

である。よって, T_f は U 上の超関数である。

写像 $L^1_{\mathrm{loc}}(U) \to \mathcal{D}'(U)$ を $f \mapsto T_f$ で定義する。この写像が単射であることを示さなくてはならない。それには、次の補題が言えれば十分である。

補題 1.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ とする。

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U),\ \int_U f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \text{ が成り立つのは } f = 0 \text{ a.e. のときに限る。} \tag{1.12}$$

この補題の証明は省略する。

局所可積分関数の空間 $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ は超関数の空間 $\mathcal{D}'(U)$ の線形部分空間と思える。

1.6 $\mathcal{D}'$ の局所性

定義 1.2. $\mathbb{R}^n$ の 2 つの開集合 U , V が $U \subset V$ であると仮定する。このとき、$\varphi \in \mathcal{D}(U)$ の定義域を V まで 0 で拡張することにより、$\mathcal{D}(V)$ の元が定義される。この写像を $\iota_{VU} : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$ と書く。$T \in \mathcal{D}'(V)$ とする。このとき、$T \circ \iota_{VU} \in \mathcal{D}'(U)$ を T の U への制限と呼び、$T|_U$ と書く。

制限について、次が成り立つ。

定理 1.3. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U の開被覆とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $T \in \mathcal{D}'(U)$ が、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathcal{D}'(U_\lambda)$ 上で $T|_{U_\lambda} = 0$ ならば、$\mathcal{D}'(U)$ 上で $T = 0$ が成り立つ。

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $T_\lambda \in \mathcal{D}'(U_\lambda)$ が与えられ、任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $\mathcal{D}'(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上で $T_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu} = T_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$ が成り立つならば、$T \in \mathcal{D}'(U)$ が存在し $\mathcal{D}'(U_\lambda)$ 上で $T|_{U_\lambda} = T_\lambda$ が成り立つ。

この定理の証明は省略する。

例 1.4. デルタ関数 $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ について、$\delta|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} = 0$ が成り立つ。

1.7 C^∞-級関数と超関数の積

U を $\mathbb{R}^n$ を開集合とする。U 上定義された C^∞-級関数全体のなす環を $C^\infty(U)$ で書き表す。$\mathcal{D}'(U)$ は $C^\infty(U)$ との積を定義することにより、$\mathcal{D}'(U)$ に対し $C^\infty(U)$-加群の構造を入れることができる。

定義 1.5. $a \in C^\infty(U)$ および $T \in \mathcal{D}'(U)$ とする。a と T の積 aT を

$$\langle aT, \varphi\rangle := \langle T, a\varphi\rangle \tag{1.13}$$

で定める。

証明. 連続性 (1.6) の確認をしよう。コンパクト集合 $K \subset U$ を勝手にとる。すると、$m \in \mathbb{N}_0$ および $C > 0$ が存在して、任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K(U)$ に対し

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_m \tag{1.14}$$

が成り立つ。

$$\|a\varphi\|_m = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha (a(x)\varphi(x))| \tag{1.15}$$

であり、ライプニッツルールから

$$\partial_x^\alpha (a(x)\varphi(x)) = \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(\partial_x^\beta a(x))(\partial_x^{\alpha-\beta}\varphi(x)) \tag{1.16}$$

が成り立つ。そして、m に依存して定まる定数 C'_m を

$$C'_m := \sum_{\beta\le\alpha, |\alpha|\le m} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \tag{1.17}$$

で定義する。さらに、$x \in K$ に対し、次の不等式

$$\left|\partial_x^\beta a(x)\right| \le \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha a(x)| \tag{1.18}$$

$$\left|\partial_x^{\alpha-\beta} \varphi(x)\right| \le \|\varphi\|_m \tag{1.19}$$

が成り立つから、(1.15) 〜 (1.19) を組み合わせると不等式

$$\|a\varphi\|_m \le C'_m \left(\sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha a(x)|\right) \|\varphi\|_m \tag{1.20}$$

が得られる。よって、(1.14) と (1.20) より

$$\begin{aligned}|\langle T, a\varphi\rangle| &\le C\|a\varphi\|_m \\ &\le CC'_m \left(\sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha a(x)|\right) \|\varphi\|_m\end{aligned}$$

となるので、連続性 (1.6) が成り立つ。 □

定義 (1.13) が妥当である理由を述べておこう。$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ とする。超関数への埋め込みと a をかける操作が可換であるべきだから、

$$\begin{aligned}\langle aT_f, \phi\rangle &= \langle T_{af}, \phi\rangle \\ &= \int_U (a(x)f(x))\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_U f(x)\,(a(x)\varphi(x))\;dx \\ &= \langle T_f, a\varphi\rangle\end{aligned}$$

が成り立つべきである。よって、(1.13) は妥当である。

1.8 超関数の微分

定義 1.6. $T \in \mathcal{D}'(U)$ とする。このとき、T の変数 x_j の偏微分 $\partial T/\partial x_j : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ を

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle := -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \tag{1.21}$$

で定義する。

証明. 連続性 (1.6) を確認しよう。$K \subset U$ を任意のコンパクト集合とする。このとき、$m \in \mathbb{N}_0$ および $C > 0$ が存在して、$\varphi \in \mathcal{D}_K(u)$ ならば $|\langle T, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_m$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\left| -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \right| &\le C\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\|_m \\ &\le C\|\varphi\|_{m+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。これは、連続性 (1.6) を満たしている。 □

定義 (1.21) が妥当である理由を述べておこう。$f \in C^\infty(U) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ とする。超関数への埋め込みと微分する操作が可換であるべきだから、

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi \right\rangle \\ &= \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi(x)\,dx \\ &= -\int_U f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx \\ &= -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つべきである。よって、(1.21) は妥当である。

1.9 超関数空間の位相

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathcal{D}'(U)$ の点列とする。

定義 1.7. 点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ が有界であるとは、

$$\forall K \subset U \text{コンパクト}, \exists m \in \mathbb{N}_0, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(U), \forall j \in \mathbb{N}, |\langle T_j, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_m \tag{1.22}$$

が成り立つときをいう。

定義 1.8. 点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ が $T \in \mathcal{D}'(U)$ に収束するとは、点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ が有界であって、さらに

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U), \lim_{j \to \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \tag{1.23}$$

が成り立つときをいう。

定義 1.9. 点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとは、点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ が有界であって、さらに

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U), \{\langle T_j, \varphi \rangle\}_{j=1}^{\infty} \text{ が } \mathbb{C} \text{ 上のコーシー列} \tag{1.24}$$

になるときをいう。

点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ がコーシー列であるならば、ある超関数 T に収束する。実際、条件 (1.24) から写像 $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{j \to \infty} \langle T_j, \varphi \rangle \tag{1.25}$$

で定義する。T が超関数であることを示すには、T が線形写像であることは明らかだから、連続性 (1.6) を示せばよい。

点列 $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ は有界であるから、任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対し、$m \in \mathbb{N}_0$ および $C > 0$ が存在して、任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K(U)$ に対し、

$$\forall j \in \mathbb{N}, |\langle T_j, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_m \tag{1.26}$$

が成り立つ。$j \to \infty$ すれば、左辺は収束し、

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_m \tag{1.27}$$

を得る。以上から、連続性 (1.6) が従う。