

微分幾何学の初歩の初歩

Palais Blanc

2025 年 2 月 17 日

目次

1	リーマン計量の初歩	2
1.1	直交座標と極座標	2
1.2	球面のリーマン計量	2
1.3	球面の面積	3
1.4	面積の正しい地図	4
1.5	角度の正しい地図	5
2	ローレンツ計量の初歩	6
2.1	ミンコフスキー時空	6
2.2	等加速度直進運動	7
2.3	シュヴァルツシルト 時空	10

1 リーマン計量の初歩

1.1 直交座標と極座標

直交座標は、縦 x 横 y 高さ z で三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の点の位置 (x, y, z) を表します。極座標は、原点からの距離 r 経度 θ 緯度 ϕ の三つの情報 (r, ϕ, θ) でユークリッド空間の位置を表します。ただし、 $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ とします。直交座標と極座標の間には、次の関係

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \cos \theta, \\y &= r \cos \phi \sin \theta, \\z &= r \sin \phi\end{aligned}\tag{1.1}$$

があります。式 (1.1) は、座標変換と呼ばれます。

三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ はリーマン多様体であり、そのリーマン計量 $g_{\mathbb{R}^3}$ は

$$g_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2\tag{1.2}$$

と表されます。

リーマン計量 $g_{\mathbb{R}^3}$ を極座標で表してみましょう。座標変換 (1.1) の全微分

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \\dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta, \\dz &= \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta\end{aligned}\tag{1.3}$$

を式 (1.2) に代入します。すると、

$$\begin{aligned}g_{\mathbb{R}^3} &= (\cos \phi \cos \theta dr - r \sin \phi \cos \theta d\phi - r \cos \phi \sin \theta d\theta)^2 \\&\quad + (\cos \phi \sin \theta dr - r \sin \phi \sin \theta d\phi + r \cos \phi \cos \theta d\theta)^2 \\&\quad + (\sin \phi dr + r \cos \phi d\phi)^2 \\&= dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \cos^2 \phi d\theta^2\end{aligned}\tag{1.4}$$

となり、極座標で表すことができました。

1.2 球面のリーマン計量

R を定数 ($R > 0$) とするとき、半径 R の球面 S_R^2 は、局所座標 (ϕ, θ) をもつ多様体です。 S_R^2 は式

$$\begin{aligned}x &= R \cos \phi \cos \theta, \\y &= R \cos \phi \sin \theta, \\z &= R \sin \phi\end{aligned}\tag{1.5}$$

によって、三次元ユークリッド空間に埋め込まれているので、 $g_{\mathbb{R}^3}$ から S_R^2 に自然なリーマン計量の構造を入れることが出来ます。それを計算してみましょう。式 (1.5) の全微分

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta \end{aligned} \quad (1.6)$$

を式 (1.2) に代入すると

$$\begin{aligned} g_{S_R^2} &= (-R \sin \phi \cos \theta d\phi - R \cos \phi \sin \theta d\theta)^2 \\ &\quad + (-R \sin \phi \sin \theta d\phi + R \cos \phi \cos \theta d\theta)^2 \\ &\quad + (R \cos \phi d\phi)^2 \\ &= R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2 \phi d\theta^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

となり、半径 R の球面 S_R^2 のリーマン計量 $g_{S_R^2}$ が求められました。局所座標 (ϕ, θ) の変数の範囲は $0 < \theta < 2\pi$ かつ $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ です。

1.3 球面の面積

一般のリーマン多様体 (M, g) の体積は次のように定義されています。局所座標 $(x^1, \dots, x^m)$ によって

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.8)$$

(ただし、正方行列 $(g_{ij})_{ij}$ は正値で対称な行列) と表示したとき、体積要素

$$V_M = \sqrt{\det(g_{ij})_{ij}} dx^1 \cdots dx^m \quad (1.9)$$

を M 上で積分することによって得られます。

これを利用して、球面 S_R^2 の面積を計算してみましょう。 S_R^2 のリーマン計量は、(1.7) で求められたので、 S_R^2 の体積要素は、(1.9) より

$$\begin{aligned} V_{S_R^2} &= \sqrt{\begin{vmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{vmatrix}} d\phi d\theta \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \phi \end{vmatrix}} d\phi d\theta \\ &= R^2 \cos \phi d\phi d\theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

となります。 S_R^2 上で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{S_R^2} V_{S_R^2} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \phi d\phi \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

となり、半径 R の球面の面積が求められました。

1.4 面積の正しい地図

面積の正しい地図を作るには、どのような座標 (u, v) を選んだら良いか考えてみます。ここでは、経度は $\theta = v$ とし、緯度が未知関数 f を選んで $\phi = f(u)$ となるような f を見つけることにします。即ち、座標 (ϕ, θ) と (u, v) の関係が

$$\begin{aligned}\phi &= f(u), \\ \theta &= v\end{aligned}\tag{1.12}$$

になると仮定します。リーマン計量 $g_{S_R^2}$ を (u, v) で表してみましょう。(1.7) に、(1.12) の全微分

$$\begin{aligned}d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv, \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial u} du + \frac{\partial \theta}{\partial v} dv\end{aligned}\tag{1.13}$$

を代入すると、

$$g_{S_R^2} = R^2 f'(u)^2 du^2 + R^2 \cos^2 f(u) dv^2\tag{1.14}$$

となります。さらに体積要素を (u, v) で表すと

$$V_{S_R^2} = R^2 f'(u) \cos f(u) du dv\tag{1.15}$$

となります。したがって、面積が正しい地図であるためには、

$$f'(u) \cos f(u) = C\tag{1.16}$$

でなければなりません。 C は定数です。式 (1.16) は変数分離形の微分方程式なので、解くと

$$\sin f(u) = Cu + D\tag{1.17}$$

となります。定数は簡単のため、 $C = 1$ かつ $D = 0$ と仮定することにします。すると、

$$f(u) = \arcsin u\tag{1.18}$$

を得ます。よって、 (ϕ, θ) と (u, v) の座標変換は

$$\begin{aligned}u &= \sin \phi, \\ v &= \theta\end{aligned}\tag{1.19}$$

で、リーマン計量と体積要素は、

$$g_{S_R^2} = \frac{R^2}{1-u^2} du^2 + R^2(1-u^2) dv^2\tag{1.20}$$

$$V_{S_R^2} = R^2 du dv\tag{1.21}$$

となります。ただし、 u と v の範囲はそれぞれ、 $-1 < u < 1$, $0 < v < 2\pi$ です。

1.5 角度の正しい地図

角度の正しい地図を作るには、どのような座標 (u, v) を選んだら良いか考えてみます。ここでは、前回と同様、経度は $\theta = v$ とし、緯度が未知関数 f を選んで $\phi = f(u)$ となるような f を見つけることにします。即ち、座標 (ϕ, θ) と (u, v) の関係が

$$\begin{aligned}\phi &= f(u), \\ \theta &= v\end{aligned}\tag{1.22}$$

になると仮定します。リーマン計量を (u, v) で表すと (1.7) より

$$g_{S_R^2} = R^2 f'(u)^2 du^2 + R^2 \cos^2 f(u) dv^2\tag{1.23}$$

となります。 $g_{S_R^2}$ の形から、角度が正しい地図であるためには

$$f'(u) = \cos f(u)\tag{1.24}$$

となれば十分です。これは変数分離形の微分方程式なので、解くと

$$\log \left| \tan \left(\frac{f(u)}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = u + C\tag{1.25}$$

となります。但し、 C は積分定数。ここでは $C = 0$ と仮定して計算を進めると、 (ϕ, θ) と (u, v) の座標変換は

$$\begin{aligned}u &= \log \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \\ v &= \theta\end{aligned}\tag{1.26}$$

となります。そして、

$$f(u) = 2 \arctan(e^u) - \frac{\pi}{2}\tag{1.27}$$

ですから、リーマン計量 $g_{S_R^2}$ は、(1.27) を (1.23) に代入すれば

$$g_{S_R^2} = \frac{4R^2}{(e^u + e^{-u})^2} (du^2 + dv^2)\tag{1.28}$$

と書けます。 u と v の範囲は、それぞれ $-\infty < u < \infty$ 、 $0 < v < 2\pi$ となります。

2 ローレンツ計量の初歩

2.1 ミンコフスキー時空

t を時間、 x を縦、 y を横、 z を高さとして、四つの変数の組 (t, x, y, z) により、時空を考えることができます。とくに、 c を光速定数として、計量

$$g = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.1)$$

を定義することにより、 g はローレンツ計量となり、ミンコフスキー時空 $(\mathbb{R}^4, g)$ を考えることができます。

相対性理論においては、時間変数 t とは別に固有時間 $\tau \in \mathbb{R}$ というパラメーターを考え、固有時間 τ に対して、事象 $\alpha(\tau)$ を対応させる写像

$$\begin{aligned} t &= \alpha^t(\tau), \\ x &= \alpha^x(\tau), \\ y &= \alpha^y(\tau), \\ z &= \alpha^z(\tau) \end{aligned} \quad (2.2)$$

を定義して、質点の運動 α を考えることができます。ただ、 α は何でもよいわけではなく、

$$\alpha^t(\tau) \text{ は増加関数である} \quad (2.3)$$

ことと、

$$c^2 \left(\frac{d\alpha^t}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{d\alpha^x}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{d\alpha^y}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{d\alpha^z}{d\tau} \right)^2 = c^2 \quad (2.4)$$

の二つを満たさなければなりません。(2.3) と (2.4) の条件を合わせて、運動の条件と呼びます。

ここで、もっとも簡単な等速直線運動をする質点の運動 α を求めてみましょう。簡単のため、 $y = z = 0$ に束縛され、二次元 (t, x) の時空を考えることにします。 α^t 、 α^x は、比例定数 a 、 b によって、

$$\begin{aligned} t &= \alpha^t(\tau) = a\tau, \\ x &= \alpha^x(\tau) = b\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

と書けていると仮定し、 a と b を決定しましょう。(2.5) の二つの式で τ を消去して、 $x = x(t)$ という軌跡をつくります。 v という変数を

$$v := \frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \quad (2.6)$$

で定義します。一方、(2.5) 式を (2.4) に代入すると、

$$c^2 a^2 - b^2 = c^2 \quad (2.7)$$

を得ます。二つの式 (2.6) と (2.7) を a 、 b を未知数とする連立方程式をみなして解きます。解くと

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ b &= \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

が得られます。結局、求める答えは

$$\begin{aligned} t &= \alpha^t(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ x &= \alpha^x(\tau) = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となりました。ただし、 v は $|v| < c$ を満たす定数で、相対論的速度と呼びます。

2.2 等加速度直進運動

ミンコフスキー時空内で、等加速度直進運動する質点を考えてみます。簡単のため、 t を時間変数、 x を空間変数とします。計量は

$$g = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (2.10)$$

で表されます。但し、 c は光速定数です。 τ を固有時とすると、質点の運動は写像 $\alpha : \tau \mapsto (t(\tau), x(\tau))$ として表されます。運動の条件は、

$$g\left(\frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right) = c^2 \quad (2.11)$$

となります。つまり、左辺を具体的に書き直すと

$$c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = c^2 \quad (2.12)$$

となります。

質点の加速度の大きさを a とすると、定義より、

$$a = \sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}\right)} \quad (2.13)$$

ですが、 g の形から接続係数が全部 0 なので、結局

$$a = \sqrt{-c^2 \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 x}{d\tau^2}\right)^2} \quad (2.14)$$

となります。

加速度の大きさ a が定数であると仮定して、質点 α の運動を求めてみます。

フルネの公式より、次が成り立ちます。

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha = \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_2^\alpha, \quad (2.15)$$

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha = \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha. \quad (2.16)$$

但し、

$$e_1^\alpha = \frac{1}{c} \frac{d\alpha}{d\tau}, \quad (2.17)$$

$$\kappa_1^\alpha = \frac{a}{c^2}, \quad (2.18)$$

$$\nu^\alpha = c \quad (2.19)$$

です。(2.15) を使って、 e_2^α を具体的に描くと

$$e_2^\alpha = \frac{1}{\kappa_1^\alpha \nu^\alpha} \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha, \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{a} \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau} \quad (2.21)$$

となります。さらに、(2.16) を書き直すと、

$$(2.16 \text{ の左辺}) = \frac{1}{a} \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}}^2 \frac{d\alpha}{d\tau}, \quad (2.22)$$

$$(2.16 \text{ の右辺}) = \frac{a}{c^2} \frac{d\alpha}{d\tau} \quad (2.23)$$

を得ます。つまり、方程式

$$\frac{1}{a} \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}}^2 \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{a}{c^2} \frac{d\alpha}{d\tau} \quad (2.24)$$

が得られます。座標を使って書き下せば

$$\frac{1}{a} \frac{d^3 t}{d\tau^3} = \frac{a}{c^2} \frac{dt}{d\tau}, \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^3 x}{d\tau^3} = \frac{a}{c^2} \frac{dx}{d\tau} \quad (2.26)$$

となります。これは、3 階の定数係数線形微分方程式です。一般解は、

$$t = C_1 \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) + t_0, \quad (2.27)$$

$$x = C_3 \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + C_4 \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) + x_0 \quad (2.28)$$

となります。ただし、 $C_1, C_2, C_3, C_4, t_0, x_0$ は τ を含まない定数です。(2.27) と (2.28) を τ で微分すると、

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{aC_1}{c} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{aC_2}{c} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right), \quad (2.29)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{aC_3}{c} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{aC_4}{c} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \quad (2.30)$$

となります。一般解は、条件 (2.12) も満たします。そこで、(2.29) と (2.30) を (2.12) に代入すると、

$$c^2 \left\{ \frac{a^2 C_1^2}{c^2} \exp\left(\frac{2a\tau}{c}\right) - 2 \frac{a^2 C_1 C_2}{c^2} + \frac{a^2 C_2^2}{c^2} \exp\left(-\frac{2a\tau}{c}\right) \right\} \quad (2.31)$$

$$- \left\{ \frac{a^2 C_3^2}{c^2} \exp\left(\frac{2a\tau}{c}\right) - 2 \frac{a^2 C_3 C_4}{c^2} + \frac{a^2 C_4^2}{c^2} \exp\left(-\frac{2a\tau}{c}\right) \right\} = c^2 \quad (2.32)$$

となります。整理すると、

$$\left(a^2 C_1^2 - \frac{a^2 C_3^2}{c^2} \right) \exp\left(\frac{2a\tau}{c}\right) - 2a^2 C_1 C_2 + 2 \frac{a^2 C_3 C_4}{c^2} + \left(a^2 C_2^2 - \frac{a^2 C_4^2}{c^2} \right) \exp\left(-\frac{2a\tau}{c}\right) = c^2 \quad (2.33)$$

となります。 C_1, C_2, C_3, C_4 は τ を含まない定数なので、次の式

$$a^2 C_1^2 - \frac{a^2 C_3^2}{c^2} = 0, \quad (2.34)$$

$$-2a^2 C_1 C_2 + 2 \frac{a^2 C_3 C_4}{c^2} = c^2, \quad (2.35)$$

$$a^2 C_2^2 - \frac{a^2 C_4^2}{c^2} = 0 \quad (2.36)$$

が成り立ちます。この連立方程式を解くと、

$$(C_1, C_2, C_3) = \left(\frac{c^3}{4a^2C_4}, -\frac{C_4}{c}, \frac{c^4}{4a^2C_4} \right), \quad (2.37)$$

$$= \left(-\frac{c^3}{4a^2C_4}, \frac{C_4}{c}, \frac{c^4}{4a^2C_4} \right) \quad (2.38)$$

となります。 C_4 は任意定数です。(2.37) の場合は、

$$t = \frac{c^3}{4a^2C_4} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{C_4}{c} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) + t_0, \quad (2.39)$$

$$= \frac{c}{a} \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2}{2aC_4} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{2aC_4}{c^2} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + t_0, \quad (2.40)$$

$$x = \frac{c^4}{4a^2C_4} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + C_4 \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) + x_0, \quad (2.41)$$

$$= \frac{c^2}{a} \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2}{2aC_4} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \frac{2aC_4}{c^2} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + x_0 \quad (2.42)$$

と変形できるので、 $d\alpha/d\tau$ が未来向き、即ち $dt/d\tau > 0$ となるのは $C_4 > 0$ のときで、 $\exp(A) = (c^2)/(2aC_4)$ と置くと、

$$t = \frac{c}{a} \frac{1}{2} \left\{ \exp(A) \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \exp(-A) \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + t_0, \quad (2.43)$$

$$= \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c} + A\right) + t_0 \quad (2.44)$$

$$x = \frac{c^2}{a} \frac{1}{2} \left\{ \exp(A) \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \exp(-A) \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + x_0, \quad (2.45)$$

$$= \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c} + A\right) + x_0 \quad (2.46)$$

となります。同様に、(2.38) の場合は、

$$t = -\frac{c^3}{4a^2C_4} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \frac{C_4}{c} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) + t_0, \quad (2.47)$$

$$= \frac{c}{a} \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2}{2a(-C_4)} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{2a(-C_4)}{c^2} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + t_0, \quad (2.48)$$

$$= \frac{c}{a} \frac{1}{2} \left\{ \exp(B) \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \exp(-B) \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + t_0, \quad (2.49)$$

$$= \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c} + B\right) + t_0, \quad (2.50)$$

$$x = \frac{c^4}{4a^2C_4} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + C_4 \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) + x_0, \quad (2.51)$$

$$= -\frac{c^2}{a} \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2}{2a(-C_4)} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \frac{2a(-C_4)}{c^2} \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + x_0, \quad (2.52)$$

$$= -\frac{c^2}{a} \frac{1}{2} \left\{ \exp(B) \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \exp(-B) \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right) \right\} + x_0, \quad (2.53)$$

$$= -\frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c} + B\right) + x_0 \quad (2.54)$$

となります。 $d\alpha/d\tau$ が未来向き、即ち $dt/d\tau > 0$ となるのは $C_4 < 0$ のときで、 $\exp(B) = (c^2)/(2a(-C_4))$ と置いています。

2.3 シュヴァルツシルト 時空

シュヴァルツシルト 時空 (M, g) は定数 $a > 0$ によって

$$M := \{(t, r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^4 : r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\} \quad (2.55)$$

$$g := \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.56)$$

と定義されます。そして、

$$\tilde{M} := \{(\tilde{u}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathbb{R}^4 : \tilde{r} > 0, 0 < \tilde{\theta} < \pi, 0 < \tilde{\phi} < 2\pi\} \quad (2.57)$$

$$\tilde{g} := \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}}\right) d\tilde{u}^2 - 2d\tilde{u} d\tilde{r} - \tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi}^2) \quad (2.58)$$

と定義することにより、 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ はローレンツ多様体となります。実際、二次形式 F を

$$\begin{aligned} F[d\tilde{u}, d\tilde{r}] &:= \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}}\right) d\tilde{u}^2 - 2d\tilde{u} d\tilde{r} \\ &= \begin{pmatrix} d\tilde{u} & d\tilde{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

で定義します。但し、 $b := a/\tilde{r}$ です。 $\tilde{r} > 0$ なので $b > 0$ です。右辺の 2 次正方行列の固有多項式は

$$\Phi_F(\lambda) := \lambda^2 - (1-b)\lambda - 1 \quad (2.60)$$

となります。 $\Phi_F(0) = -1 < 0$ なので、固有方程式 $\Phi_F(\lambda) = 0$ の解は、正の数と負の数を持つ一つずつ持ちます。よって、 F の符号は $(1, 1)$ となります。したがって、計量 $\tilde{g}$ の符号は $(1, 3)$ となり、 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ はローレンツ多様体であることが示されました。

写像 $M \rightarrow \tilde{M}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= ct + r + a \log \left(\frac{r}{a} - 1 \right) \\ \tilde{r} &= r \\ \tilde{\theta} &= \theta \\ \tilde{\phi} &= \phi \end{aligned} \quad (2.61)$$

と定義することにより、 (M, g) から $(\tilde{M}, \tilde{g})$ へのローレンツ多様体としての埋め込み写像となります。実際、

$$\begin{aligned} d\tilde{u} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} dr + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} d\phi \\ d\tilde{r} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \phi} d\phi \\ d\tilde{\theta} &= \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} dr + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \phi} d\phi \\ d\tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} dr + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi} d\phi \end{aligned} \quad (2.62)$$

を計算すると、

$$\begin{aligned}d\tilde{u} &= c\,dt + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr \\d\tilde{r} &= dr \\d\tilde{\theta} &= d\theta \\d\tilde{\phi} &= d\phi\end{aligned}\tag{2.63}$$

となるので、これらを (2.58) に代入すると、(2.56) が得られます。