解析力学ノート

Palais Blanc

目次

1　準備

この節では, 多様体やバンドルについては既知と仮定し, ベクトル場や微分形式といった言葉を証明なしで復習する. 詳しい解説は, 多様体の本 (例えば志賀 [1]) に譲ることにする.

1.1　ベクトル場

M を滑らかな多様体, TM を M の接バンドルとする.

定義 1.1. TM の滑らかな切断面をベクトル場という.

M 上の滑らかな関数全体を $\mathrm{C}^\infty(M)$ で表し, M 上のベクトル場の全体を $\mathcal{X}(M)$ で表す. すると $\mathcal{X}(M)$ は $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群の構造をもつ.

命題 1.2. X を $\mathrm{C}^\infty(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への写像とする. X が次の条件を満たせば, X は M 上のベクトル場を定める.

(i) X は $\mathbb{R}$ 線型写像.
(ii) 任意の $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, 次が成り立つ.

$$X(fg) = f \cdot X(g) + X(f) \cdot g \tag{1.1}$$

局所座標 (U, x^i) を使ってベクトル場を表すことを考えよう. まず, $\mathrm{C}^\infty(U)$ から $\mathrm{C}^\infty(U)$ への写像

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{1.2}$$

は, 命題 1.2 よりベクトル場である. すると, 任意のベクトル場 X は $X^i = X(x^i)$ と置くことにより, 次の形に書ける.

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.3}$$

また, 別の局所座標 $(\bar{U}, \bar{x}^i)$ を取り,

$$X = \sum_j \bar{X}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \tag{1.4}$$

と表現されるならば, $U \cap \bar{U}$ 上で局所座標変数 x^i と $\bar{x}^j$ との間の座標変換則は,

$$\bar{X}^j = \sum_i X^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \tag{1.5}$$

となる.

定義 1.3. M 上のベクトル場 X および Y に対し, $\mathrm{C}^\infty(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への写像

$$f \mapsto X(Yf) - Y(Xf) \tag{1.6}$$

は命題 1.2 よりベクトル場を定める. これを X と Y の括弧積といい $[X, Y]$ で表す.

括弧積により $\mathcal{X}(M)$ 上には Lie 環の構造が入る．

定義 1.4. $\mathbb{R}\times M$ から M への滑らかな写像 $(t,x)\mapsto\varphi_t(x)$ が, 次の 2 つの条件を満たすとき, φ を M 上の 1 パラメータ変換群という．

(i) 各 $t\in\mathbb{R}$ に対して, φ_t は, M から M への滑らかな同相写像を与えている．
(ii) すべての $t,s\in\mathbb{R}$ に対し, $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$

1 パラメータ変換群はベクトル場を定める．即ち, 次が成立する．

命題 1.5. φ を M 上の 1 パラメータ変換群とする．$f\in C(M)$ に対し $X(f)\in C(M)$ を

$$X(f)(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(x))-f(x)}{t} \tag{1.7}$$

で定める．このとき, f に $X(f)$ を対応させる写像 X は, ベクトル場である．

逆に, M 上のベクトル場 X が与えられたとき, 式 (1.7) を満たす M 上の 1 パラメータが存在するかどうかは, 自明でない問題である．結論を言えば, 一般には 1 パラメータ変換群は存在するとは限らない．しかし, 存在するとすれば一意に定まる．

定義 1.6. M 上のベクトル場 X が完備であるとは, 式 (1.7) を満たす 1 パラメータ変換群 φ が存在するときをいう．また, この 1 パラメータ変換群を $\exp(tX)$ と書く．

ベクトル場 X と 1 パラメータ変換群 φ との関係を局所座標 (U,x^i) を使って表そう．M の次元を m とする．いま, $\varphi_t(x)=(x^1(t),\cdots,x^m(t))$ とおく．このとき,

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(\varphi_{t+s}(x))-f(\varphi_s(x))}{s}=X(f)(\varphi_t(x)) \tag{1.8}$$

であるから, 両辺を書き直すことにより

$$\frac{dx^i}{dt}=X^i(x^1(t),\ldots,x^m(t)),\qquad x^i(0)=x^i \tag{1.9}$$

を得る．この式は完備なベクトル場から, 1 パラメータ変換群を求める方法を与える．即ち X から $\exp(tX)$ を計算するには, 微分方程式 (1.9) を解けばよい．

1.2 微分形式

T^*M で M の余接バンドルを表す．

定義 1.7. T^*M の滑らかな切断面を 1 次微分形式という．M 上の 1 次微分形式全体を $\Omega^1(M)$ で表す．

$\Omega^1(M)$ は, $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群の構造をもつ．さらに, 1 次微分形式は次のように特徴づけられる．

命題 1.8. 1 次微分形式は, $\mathcal{X}(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群としての準同型写像と同一視できる．

1 次微分形式 ω を局所座標 (U,x^i) で表そう．まず, 1 次微分形式 dx^i を (1.2) で定義したベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ の双対元とする．すると, 一般の 1 次微分形式 ω は

$\omega_i = \omega\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ とおくことにより, 次のように表される.

$$\omega = \sum_i \omega_i dx^i \tag{1.10}$$

また, 別の局所座標 $(\bar{U}, \bar{x}^j)$ によって,

$$\omega = \sum_j \bar{\omega}_j d\bar{x}^j \tag{1.11}$$

と表されているとすれば, $U \cap \bar{U}$ 上で, 関係式

$$\bar{\omega}_j = \sum_i \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \tag{1.12}$$

が成り立つ.

次に, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ を微分することを考えよう.

定義 1.9. $\mathcal{X}(M)$ から $\mathrm{C}^\infty(M)$ への写像

$$df : X \mapsto X(f) \tag{1.13}$$

は, 命題 1.8 により 1 次微分形式を定める. df を f の微分という.

df は, 局所座標 (U, x^i) によって, 次のように書ける.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{1.14}$$

T^*M の k 次外積バンドルを $\bigwedge^k T^*M$ で表す.

定義 1.10. $\bigwedge^k T^*M$ の滑らかな切断面を k 次微分形式という.

M 上の k 次微分形式全体を $\Omega^k(M)$ で表す. 但し, $k = 0$ の場合は $\Omega^0(M) := \mathrm{C}^\infty(M)$ と約束する.

外積バンドル $\bigwedge^k T^*M$ の定義により

$$\Omega^k(M) = \bigwedge_{\mathrm{C}^\infty(M)}^{k} \Omega^1(M) \tag{1.15}$$

が成り立つ.

定義 1.11. 次の条件を満たす、$\Omega^k(M)$ から $\Omega^{k+1}(M)$ への $\mathbb{R}$ 線型写像 d が一意に存在する。d を外微分という.

(i) $f \in \Omega^0(M)$ ならば, df は f の微分である.
(ii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば, $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$.
(iii) $d \circ d = 0$.

定義 1.12. X を M 上のベクトル場とする. このとき, 次の条件をみたす $\Omega^k(M)$ 上の $\mathbb{R}$ 線型変換 L_X が一意に存在する. L_X を X による Lie 微分という.

(i) $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ ならば $L_X f = X(f)$.

(ii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば、$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta)$.

(iii) $L_X \circ d = d \circ L_X$.

定義 1.13. X を M 上のベクトル場とする. このとき, 次の条件を満たす, $\Omega^k(M)$ から $\Omega^{k-1}(M)$ への $\mathbb{R}$ 線型写像 ι_X が一意に存在する. ι_X を X による内部積という.

(i) $f \in \Omega^0(M)$ ならば, $\iota_X f = 0$.

(ii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば, $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X\beta)$.

(iii) $L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$.

M, N を滑らかな多様体, $\Phi : N \to M$ を滑らかな写像とする.

定義 1.14. Φ から自然に定まるバンドル写像 ${}^t\Phi' : N \times_M T^*M \to T^*N$ により, T^*M の切断面 ω は T^*N の切断面を誘導する. この切断面を Φ による ω の引き戻しという.

Φ による ω の引き戻しを $\Phi^*(\omega)$ で表すことにする. Φ^* は $\Omega^1(M)$ から $\Omega^1(N)$ への写像になる.

この引き戻しを局所座標を使って表すと次のようになる. M の局所座標を (U, x^i), N の局所座標を (V, y^j) とする. N の次元は n とする. 写像 Φ を

$$x^i = \Phi^i(y^1, \ldots, y^n) \tag{1.16}$$

のように表示しておく. すると, 式 (1.10) のように表示された 1 次微分形式 ω に対し, $\Phi^*\omega$ は

$$\Phi^*\omega = \sum_j \left(\sum_i \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) dy^j \tag{1.17}$$

と書ける.

次の定理により, この引き戻し Φ^* は一般の k 次微分形式の場合にまで拡張される.

定理 1.15. 多様体間の滑らかな写像 $\Phi : N \to M$ に対し, 次の条件を満たす $\mathbb{R}$ 線形写像 $\Phi^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ が一意に存在する.

(i) $f \in \Omega^0(M)$ ならば, $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$.

(ii) $\omega \in \Omega^1(M)$ ならば, $\Phi^*(\omega)$ は Φ による ω の引き戻し.

(iii) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ ならば, $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi^*(\alpha) \wedge \Phi^*(\beta)$.

2　シンプレクティック幾何学

この節では, シンプレクティック幾何学の初歩を紹介する. 勾配作用素 grad や Poisson 積の定義と性質を調べる. また, 多様体 M の余接バンドル T^*M には自然なシンプレクティック構造が入ることを証明し, 解析力学の理論を展開するための準備を行う.

2.1　シンプレクティック線型空間

V を有限次元 $\mathbb{R}$ 線型空間とする.

定義 2.1. $V \times V$ から $\mathbb{R}$ への $\mathbb{R}$ 双線型写像 ω が交代的であるとは,

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x) \tag{2.1}$$

が任意の $x, y \in V$ に対して成り立つときをいう.

さらに, 交代的 $\mathbb{R}$ 双線型写像 ω が非退化であるとは,

$$(\text{任意の } x \in V \text{ に対し, } \omega(x, y) = 0) \Longrightarrow y = 0. \tag{2.2}$$

が成り立つときをいう. このとき, ω を シンプレクティック形式という.

定義 2.2. シンプレクティック形式が付随した線型空間を シンプレクティック線型空間という.

補題 2.3. ω を シンプレクティック形式とする. 各 $x \in V$ に対し $\omega(x, \cdot)$ は V^* の元と思える. このとき, V から V^* への写像 $x \mapsto \omega(x, \cdot)$ は同型写像である.

証明. 写像を F で表すことにする. ω は非退化であるから, $\ker F = 0$. V と V^* の次元は等しいので, F は同型写像である. □

補題 2.4. $\{e_i\}_i$ を V の基底とする. このとき, $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ とおくと, 行列 $(\omega_{ij})_{ij}$ は正則である.

証明. e_i の双対基底を e^i で表せば,

$$F(e_i) = \sum_j \omega_{ij} e^j \tag{2.3}$$

となる. 補題 2.3 より F は同型写像であるから, 表現行列 $(\omega_{ij})_{ij}$ は正則である. □

2.2　シンプレクティック多様体

M を滑らかな多様体とする.

定義 2.5. M 上の 2 次微分形式 ω が, 次の 2 つの条件

(i) ω は閉形式である. すなわち $d\omega = 0$.
(ii) 接バンドル TM の各ファイバー T_xM 上で, ω_x は T_xM のシンプレクティック形式を与える.

を満たすとき, ω を M のシンプレクティック構造, (M, ω) をシンプレクティック多様体という。

ω を局所座標 x^i を使って表してみよう.

$$\omega_{ij} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{2.4}$$

とおけば

$$\omega = \sum_i \sum_j \frac{\omega_{ij}}{2} dx^i \wedge dx^j \text{ かつ } \omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{2.5}$$

と書ける.

2 次微分形式 ω がシンプレクティック構造となるための条件を成分 ω_{ij} で表しておこう.

補題 2.6. 2 次微分形式 ω を式 (2.5) の形に表しておく。そのとき、次が成り立つ。

(i) 各ファイバー T_xM 上で ω_x がシンプレクティック形式であることと, 行列 $(\omega_{ij})_{ij}$ が正則であることは同値である.

(ii) ω が閉形式であることと

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0 \tag{2.6}$$

が任意の添え字 ijk に対して成立することは同値である.

証明. (i) は補題 2.4 より明らか. (ii) について確かめよう. 実際に $d\omega$ を局所座標を用いて表せば、

$$d\omega = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \tag{2.7}$$

と書ける. したがって $d\omega = 0$ なる条件は, 任意の添え字 ijk に対し,

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} = 0 \tag{2.8}$$

である. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ であるから, 式 (2.6) を得る. □

補題 2.7. $\mathcal{X}(M)$ から $\Omega^1(M)$ への写像 $X \mapsto \iota_X\omega$ は $\mathrm{C}^\infty(M)$ 加群としての同型写像である.

証明. 局所座標 (U, x^i) をとり, ω を式 (2.5) のように表しておく. すると,

$$\begin{aligned}
\iota_X\omega &= \sum_i \sum_j \frac{\omega_{ij}}{2} \iota_X(dx^i \wedge dx^j) \\
&= \sum_i \sum_j \frac{\omega_{ij}}{2} (X^i dx^j - X^j dx^i) \\
&= \sum_j \left(\sum_i \omega_{ij} X^i\right) dx^j
\end{aligned} \tag{2.9}$$

が得られる. $(\omega_{ij})_{ij}$ は補題 2.4 より正則なので, X を $\iota_X\omega$ に対応させる写像は同型である. □

定義 2.8. 補題 2.7 により, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, 以下の等式を満たすベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ が一意に存在する.

$$df = \iota_X\omega. \tag{2.10}$$

この X を f の勾配といい, $\operatorname{grad} f$ で表す.

注意 2.9. grad は $\mathrm{C}^\infty(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への $\mathbb{R}$ 線形写像であり, シンプレクティック構造 ω に依存する.

$f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し, 勾配 $\operatorname{grad} f$ を局所座標 x^i で表してみよう.

$$\operatorname{grad} f = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.11}$$

とおく. すると, 式 (2.10) は

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \sum_j \left(\sum_i \omega_{ij} X^i \right) dx^j \tag{2.12}$$

と書ける. したがって, 任意の添字 j に対し

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_i \omega_{ij} X^i \tag{2.13}$$

が成り立つ. $(\omega_{ij})_{ij}$ の逆行列を $(\omega^{ij})_{ij}$ とおく. すると,

$$\begin{aligned} \sum_j \omega^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} &= \sum_j \omega^{jk} \sum_i \omega_{ij} X^i \\ &= \sum_i \sum_j \omega_{ij} \omega^{jk} X^i \\ &= X^k \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる. よって

$$\operatorname{grad} f = \sum_k \left(\sum_j \omega^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.15}$$

が成り立つ.

命題 2.10. $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$X(f) = \omega(\operatorname{grad} f, X). \tag{2.16}$$

証明. 局所座標 x^i をとる.

$$\begin{aligned} \omega(\operatorname{grad} f, X) &= \sum_i \sum_j \omega_{ij} \sum_k \omega^{ki} \frac{\partial f}{\partial x^k} X^j \\ &= \sum_j \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^k} X^j \sum_i \omega^{ki} \omega_{ij} \\ &= \sum_j X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= X(f) \end{aligned} \tag{2.17}$$

□

定義 2.11. $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ に対し,

$$\{f, g\} := (\operatorname{grad} f)(g)$$

とおく. これを f と g の Poisson 積という.

定理 2.12. Poisson 積は $\mathbb{R}$ 双線型写像であり, さらに次の性質を満たす.

(i) $\{f,g\}=-\{g,f\}$.

(ii) $\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$.

(iii) $\{h,\{f,g\}\}+\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$.

証明. (i) ω の交代性と命題 2.10 より,

$$\begin{aligned}\{f,g\}&=(\operatorname{grad} f)(g)\\&=\omega(\operatorname{grad} g,\operatorname{grad} f)\\&=-\omega(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} g)\\&=-(\operatorname{grad} g)(f)\\&=-\{g,f\}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

(ii) Poisson 積の定義より,

$$\begin{aligned}\{f,gh\}&=(\operatorname{grad} f)(gh)\\&=(\operatorname{grad} f)(g)h+g(\operatorname{grad} f)(h)\\&=\{f,g\}h+g\{f,h\}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

(iii) 局所座標 x^i によって

$$\{h,\{f,g\}\}+\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\} \tag{2.20}$$

$$=\sum_{ijk}\sum_{p}\left(\omega^{pk}\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial x^p}+\omega^{pi}\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial x^p}+\omega^{pj}\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial x^p}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial h}{\partial x^k} \tag{2.21}$$

$$=\sum_{ijk}\sum_{pqr}\omega^{pi}\omega^{qj}\omega^{rk}\left(\frac{\partial\omega_{qr}}{\partial x^p}+\frac{\partial\omega_{rp}}{\partial x^q}+\frac{\partial\omega_{pq}}{\partial x^r}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial h}{\partial x^k} \tag{2.22}$$

となる. 等式 (2.22) は, 逆行列の微分公式

$$\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial x^p}=-\sum_q\sum_r\omega^{iq}\frac{\partial\omega_{qr}}{\partial x^p}\omega^{rj} \tag{2.23}$$

から従う. 補題 2.6 の式 (2.6) より, 和 (2.22) は 0 である.

□

2.3 シンプレクティック多様体の例

M を滑らかな m 次元多様体とする. このとき, 余接バンドル T^*M は滑らかな $2m$ 次元多様体であり, T^*M には次のように自然なシンプレクティック構造を入れることが出来る.

x^i を M の局所座標 とし, 点 $x=(x^1,\ldots,x^m)\in M$ をとる. 余接ベクトル $p_x\in T_x^*M$ は,

$$p_x=\sum_i p^i(dx^i)_x \tag{2.24}$$

と書けるから, T_x^*M は座標 $(p^1,\ldots,p^m)$ をもつ. 従って, T^*M に局所座標 (x^i,p^i) が定義される. この座標を x^i の誘導座標という.

この誘導座標 (x^i, p^i) を使って, 1 次微分形式 $\sigma \in \Omega^1(T^*M)$ を

$$\sigma = \sum_i p^i dx^i \tag{2.25}$$

と定義する. σ が, 局所座標 x^i のとり方によらず, 大域的に定義出来ることを示そう.

命題 2.13. σ は局所座標 x^i によらない.

証明. M に別の局所座標 $\bar{x}^i$ を取り, その誘導座標を $(\bar{x}^i, \bar{p}^i)$ とおく. このとき, 余接バンドル T^*M の定義により

$$\bar{p}^j = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} p^i \tag{2.26}$$

なる関係がある. したがって,

$$\begin{aligned}\sum_j \bar{p}^j d\bar{x}^j &= \sum_j \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} p^i \sum_k \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k \\ &= \sum_i p^i dx^i\end{aligned} \tag{2.27}$$

が成り立つ. これは σ が座標の取り方によらないことを示している. □

$\omega \in \Omega^2(T^*M)$ を $\omega = d\sigma$ で定義する. すると, 次が成り立つ.

命題 2.14. ω は T^*M 上のシンプレクティック構造を定める.

証明. まず ω が閉形式であることは, 外微分の性質より, $d\omega = d \circ d\sigma = 0$ となることからわかる. ω が非退化であることは, 誘導座標 (x^i, p^i) を用いて

$$\omega = \sum_i dp^i \wedge dx^i \tag{2.28}$$

と書けることからわかる. □

以上により, (T^*M, ω) はシンプレクティック多様体になることがわかった. (T^*M, ω) を標準的なシンプレクティック多様体という.

最後に, (T^*M, ω) 上での勾配と Poisson 積についてまとめておこう. x^i を M の局所座標, (x^i, p^i) を誘導座標とする. $f \in \mathrm{C}^\infty(T^*M)$ の勾配は

$$\operatorname{grad} f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{2.29}$$

となる. $f, g \in \mathrm{C}^\infty(T^*M)$ に対し, Poisson 積は

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) \tag{2.30}$$

となる.

3 解析力学

この節では, 前節で導入したシンプレクティック幾何学を使って解析力学の理論を展開する. はじめに Hamilton 形式では, 一般のシンプレクティック多様体を相空間と見なして, 解析力学の公理である, 状態, 物理量, 時間発展なる概念を導入し, 質点の運動の性質を調べる.

次の Legendre 変換では, 配置空間上の実数値関数から相空間上の実数値関数を構成する手順を学ぶ.

最後の Lagrange 形式では, リーマン多様体内を運動する質点の解析を行う. 配置空間上の実数値関数であるラグランジアンから Legendre 変換を行なってハミルトニアンを構成し, 運動方程式を得る. 応用として, 運動量保存や角運動量保存についての議論を行う.

3.1 Hamilton 形式

解析力学を数学的に記述してみよう. シンプレクティック多様体 (M, ω) を 1 つ固定する.

定義 3.1. M の点 $x \in M$ を状態という.

定義 3.2. 関数 $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ のことを M 上の物理量という. また, 状態 $x \in M$ が与えられたとき, 値 $f(x)$ を状態 x における物理量 f の観測値という.

ここで, ハミルトニアンと呼ばれる物理量 $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$ を考え, ひとつ固定する. さらに, h の勾配 $\operatorname{grad} h$ は完備と仮定する.

定義 3.3. $\operatorname{grad} h$ の 1 パラメータ変換群 $(t, x) \mapsto \exp(t \operatorname{grad} h)(x)$ を時間発展という. 時刻 0 の 状態を $x \in M$ とするとき, $\exp(t \operatorname{grad} h)(x) \in M$ を 時刻 t における状態 x の時間発展という.

例 3.4 (Hamilton の正準方程式)**.** 今, M を多様体, T^*M を M の余接バンドルとする. 命題 2.14 より, T^*M には標準的な シンプレクティック構造が入る. T^*M 上のハミルトニアン h による時間発展を考えよう. M の局所座標を x^i, T^*M の誘導座標を $(x^i; p^i)$ とする. このとき, $\operatorname{grad} h$ の 1 パラメータ変換群の満たすべき微分方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial h}{\partial p^i} \\ \dfrac{dp^i}{dt} = -\dfrac{\partial h}{\partial x^i} \end{cases} \tag{3.1}$$

となる. これを h の正準方程式という.

物理で重要な保存量について議論しよう.

定義 3.5. 物理量 $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ が保存量であるとは, 任意の状態 $x \in M$ に対し, 関数 $t \mapsto f(\exp(t \operatorname{grad} h)(x))$ が定数関数であるときをいう.

次の補題は保存量を特徴づける.

補題 3.6. f, $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ とし, $\operatorname{grad} g$ は完備とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f \circ \exp(t \operatorname{grad} g) = f$.

(ii) $\{f, g\} = 0$.

証明. 命題 2.10 より,

$$\begin{aligned}\{f, g\}(x) &= ((\operatorname{grad} g)(f))(x) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\exp(t \operatorname{grad} g)(x)) - f(x)}{t}\end{aligned} \tag{3.2}$$

が成り立つ. この式の x の代わりに $\exp(s \operatorname{grad} g)(x)$ を代入すれば,

$$\begin{aligned}&\{f, g\}(\exp(s \operatorname{grad} g)(x)) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\exp((t+s) \operatorname{grad} g)(x)) - f(\exp(t \operatorname{grad} g)(x))}{t}\end{aligned} \tag{3.3}$$

を得る. 右辺は関数 $s \mapsto f(\exp(s \operatorname{grad} g)(x))$ の導関数になっていることに注意すれば, (i) と (ii) が同値であることがわかる. □

命題 3.7. h をハミルトニアン, f を物理量とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

(i) f は保存量である.
(ii) $\{f, h\} = 0$.

証明. 補題 3.6 の直接の結果である. □

系 3.8. ハミルトニアン h は保存量である。

証明. $\{h, h\} = 0$ と命題 3.7 より従う. □

定義 3.9. $f \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$ を物理量とし, その勾配 $\operatorname{grad} f$ は完備と仮定する. このとき $\operatorname{grad} f$ の 1 パラメータ変換群 $(t, x) \mapsto \exp(t \operatorname{grad} f)(x)$ を f の相流という.

定理 3.10 (Noether)**.** f を物理量とする. 次の 2 つの命題は同値である.

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $h \circ \exp(t \operatorname{grad} f) = h$.
(ii) f は保存量である。

証明. 補題 3.6 より, (i) が成り立つことと $\{h, f\} = 0$ が成り立つこととは同値である. さらに $\{h, f\} = -\{f, h\}$ に注意すれば, 命題 3.7 より (i) と (ii) は同値である. □

3.2 Legendre 変換

V を $\mathbb{R}$ 線型空間, U を V の連結開集合とする. ここで, U 上定義された滑らかな関数 f を考える.

定義 3.11. f が正則性条件を満たすとは, f の全微分

$$Df : U \to V^* \tag{3.4}$$

が U から V^* の中への微分同相写像になるときをいう. 即ち, $U^* := Df(U)$ とおくと U^* は V^* の開集合で Df が U から U^* への微分同相写像を与えるときをいう.

定義 3.12. $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ を V と V^* の対写像とし, 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が正則性条件を満たすと仮定する. $F : U \times U^* \to \mathbb{R}$ を

$$F(v,p) := \langle v,p\rangle - f(v) \tag{3.5}$$

で定める. このとき,

$$f^*(p) := F((Df)^{-1}(p),p) \tag{3.6}$$

は U^* から $\mathbb{R}$ への滑らかな写像となる. この f^* を f の Legendre 変換という.

命題 3.13. 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が正則性条件を満たすと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(i) $f^* : U^* \to \mathbb{R}$ は正則である.
(ii) $f^{**} = f$.

証明. まず, (i) を示す. F の全微分は

$$(DF)(v,p) = (p - (Df)(v), v) \tag{3.7}$$

であるから,

$$\begin{aligned}(Df^*)(p) &= (DF)((Df)^{-1}(p),p)\begin{pmatrix} D((Df)^{-1})(p) \\ \mathrm{id}_{V^*}\end{pmatrix} \\ &= (Df)^{-1}(p).\end{aligned} \tag{3.8}$$

が成り立つ. これは Df^* が Df の逆写像であることを示している. ゆえに, Df^* は U^* から U への微分同相写像, 即ち, f^* は正則である.

次に, (ii) を示そう. Legendre 変換の定義により,

$$\begin{aligned}f^{**}(v) &= \langle v, (Df^*)^{-1}(v)\rangle - f^*((Df^*)^{-1}(v)) \\ &= \langle v, (Df)(v)\rangle - f^*((Df)(v)) \\ &= \langle v, (Df)(v)\rangle - \langle v, (Df)(v)\rangle + f(v) \\ &= f(v).\end{aligned} \tag{3.9}$$

□

Legendre 変換の具体例を一つ挙げておく.

例 3.14. g を V の非退化な計量, m を V^* の元, c を定数とする. このとき, V 上の関数

$$f(v) = \frac{1}{2}g(v,v) + m(v) + c \tag{3.10}$$

の Legendre 変換を求めてみよう. まず, V の基底を固定すると f は

$$f(v) = \frac{1}{2}\sum_{ij} g_{ij}v^iv^j + \sum_k m_kv_k + c \tag{3.11}$$

と書ける. f を微分すると,

$$Df(v)_j = \sum_i g_{ij}v^i + m_j \tag{3.12}$$

となる. Df は Affine 写像でしかも全単射であるから, 特に V から V^* への微分同相でもある. 従って, f は正則であることが分かった.

$p = Df(v)$ を逆に解くと

$$v^i = \sum_j g^{ij}(p_j - m_j) \tag{3.13}$$

となる. 但し, $(g^{ij})_{ij}$ は $(g_{ij})_{ij}$ の逆行列である. ゆえに, f の Legendre 変換は

$$f^*(p) = \frac{1}{2}\sum_{ij} g^{ij}(p_i - m_i)(p_j - m_j) - c \tag{3.14}$$

となる. また, $(g^{ij})_{ij}$ は V^* 上の非退化な計量と思えるから, その計量を g^{-1} とおけば

$$f^*(p) = \frac{1}{2}g^{-1}(p - m, p - m) - c \tag{3.15}$$

と書くこともできる.

M を多様体, E を M 上のベクトルバンドルとする.

定義 3.15. U を E の開集合, f を U から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数とする.

(i) f が正則性条件を満たすとは, 各 $x \in M$ のファイバー E_x に f を制限したもの $f|_{E_x}$ が定義 3.11 の意味で正則性条件を満たすものをいう.

(ii) E^* を E の双対バンドルとし, $f : U \to \mathbb{R}$ が正則性条件を満たすと仮定する. 各 $x \in M$ に対し $f|_{E_x}$ の Legendre 変換を考えることにより, E^* のある開集合から $\mathbb{R}$ への関数 f^* で $f^*|_{E_x^*} = (f|_{E_x})^*$ を満たすものが一つ定まる. これも f の Legendre 変換という.

3.3 Lagrange 形式

配置空間と呼ばれる滑らかな多様体 M が与えられているとする. M の余接バンドル T^*M には, 標準的なシンプレクティック構造 ω を入れておく.

定義 3.16. TM の開集合 U から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数 f が定義 3.15 の意味で正則性条件を満たすと仮定する. このような f を配置空間 M のラグランジアンという.

f を配置空間 M のラグランジアンとする. このとき f の Legendre 変換 を施すと T^*M のある開集合 U^* から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数 f^* が得られる. f^* はシンプレクティック多様体 (T^*M, ω) を U^* に制限したもの $(U^*, \omega|_{U^*})$ 上の物理量と見なせる. さらに, $\operatorname{grad} f^*$ は完備であると仮定しよう.

定義 3.17. f^* をラグランジアン f から誘導されたハミルトニアンという.

質点系の状態はシンプレクティック多様体 $(U^*, \omega|_{U^*})$ で表現され, 時間発展は $\operatorname{grad} f^*$ の 1 パラメータ変換群で与えられる.

例 3.18. M を多様体, g を M の Riemann 計量とする. Riemann 多様体 (M, g) 内を質量 m の質点が運動する系を考えよう. 今, ポテンシャルと呼ばれる滑らかな関数 $P : M \to \mathbb{R}$ を一つ与える. このとき, 質点系の

運動はラグランジアン

$$L(x,v_x)=\frac{1}{2}mg(v_x,v_x)-P(x) \tag{3.16}$$

で与えられる．但し, $x\in M$, $v_x\in T_xM$ である．x を位置座標, v_x を速度座標と呼ぶ．

次に, L から誘導されたハミルトニアンを考えよう．L の Legendre 変換は, 例 3.14 より

$$H(x,p_x)=\frac{1}{2m}g^{-1}(p_x,p_x)+P(x) \tag{3.17}$$

となる．但し $p_x\in T_x^*M$ であり, 運動量座標と呼ばれる．質点の運動 (時間発展) はハミルトニアン H の正準方程式を解くことにより計算できる．右辺の $\frac{1}{2m}g^{-1}(p_x,p_x)$ の部分を運動エネルギーといい, ポテンシャル P との和を力学的エネルギーという．補題 3.8 より H は保存量であるから, 力学的エネルギーは保存する．これは力学的エネルギー保存の法則と呼ばれる．

例 3.19. 例 3.18 を電磁気の現象を含むように拡張しよう．質点の電荷を Q とし, さらに電気スカラーポテンシャル $\phi\in \mathrm{C}^\infty(M)$ および磁気ベクトルポテンシャル $A\in\Omega^1(M)$ が与えられているとする．このとき, 質点の運動を与える (非相対論的な場合の) ラグランジアンは

$$L(x,v_x)=\frac{1}{2}mg(v_x,v_x)-P(x)+QA_x(v_x)-Q\phi(x) \tag{3.18}$$

である．また, その Legendre 変換は

$$H(x,p_x)=\frac{1}{2m}g^{-1}(p_x-QA_x,p_x-QA_x)+P(x)+Q\phi(x) \tag{3.19}$$

になる．これが (非相対論な場合の) 電磁気現象を含むハミルトニアンである．

例 3.20. 1 次元ユークリッド空間を n 個の質点が運動する系を考える．各質点の質量を $m_1,\ldots,m_n$, 位置座標を $x_1,\ldots,x_n$, 速度座標を $v_1,\ldots,v_n$ で表す．各質点に保存力のみが働く系のラグランジアンは, あるポテンシャル関数 $P(x_1,\ldots,x_n)$ を使って,

$$L=\sum_i\frac{1}{2}m_i(v_i)^2-P(x_1,\ldots,x_n) \tag{3.20}$$

と書ける．L から誘導されるハミルトニアンは

$$H=\sum_i\frac{1}{2m_i}(p_i)^2+P(x_1,\ldots,x_n) \tag{3.21}$$

となる．$p_1,\ldots,p_n$ は運動量座標である．

今,

$$T=\sum_i p_i \tag{3.22}$$

は一つの物理量を定める．これを全運動量という．この全運動量が保存量になるための条件を考えよう．T の相流を計算すると,

$$\begin{cases} x_i(t)=t+x_i\\ p_i(t)=p_i\end{cases} \tag{3.23}$$

となるので, Noether の定理より, T が保存することと, ポテンシャル関数 P が

$$P(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = P(x_1, \cdots, x_n) \tag{3.24}$$

なる等式を任意の時刻 $t \in \mathbb{R}$ に対して満たすこととは同値である.

ポテンシャル関数がこの条件を満たす例として, 系が 2 体相互作用で, 引力や斥力が質点の距離の差で書ける場合などがある.

例 3.21. 例 3.18 で空間が n 次元ユークリッド空間 の場合を考える. 今, 座標として極座標 (r, θ) を選ぶ. r は原点からの距離であり, θ は $n-1$ 次元球面座標である. ユークリッド計量を極座標で表現すると

$$g = dr \otimes dr + r^2 s_\theta \tag{3.25}$$

となる. ただし s_θ は $n-1$ 次元単位球面の Riemann 計量を表す. ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m(v_r^2 + r^2 s_\theta(v_\theta, v_\theta)) - P(r, \theta) \tag{3.26}$$

となり, ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} s_\theta^{-1}(p_\theta, p_\theta) + P(r, \theta) \tag{3.27}$$

である.

p_θ を (高次元) 角運動量と呼ぶが, この物理量が保存量になるための条件を考えよう. この相流を計算すると, $r(t)$, $p_r(t)$, $p_\theta(t)$ は時刻により変化せず, $\theta(t)$ のみが変化することがわかる. 従って, 角運動量が保存するための条件として

$$P(r, \theta(t)) = P(r, \theta) \tag{3.28}$$

を得る. この条件を満たす例としては, ポテンシャル関数が r のみの関数として書ける場合がある.

参考文献

[1] 志賀 浩二, 多様体論, 岩波講座基礎数学, 岩波書店.

[2] V. I. Arnold (安藤 韶一・蟹江 幸博・丹羽 敏雄 訳), 古典力学の数学的方法, 岩波書店 (1980).

[3] 山本 義隆・中村 孔一, 解析力学 I・II, 朝倉物理学大系, 朝倉書店.