相対性理論ノート

Palais Blanc

目次

1 Lorentz 幾何学

相対性理論で扱う時空は, 4 次元の Lorentz 多様体によってモデル化される. この節では, 準備として Lorentz 多様体の定義とその基本性質について述べる.

Lorentz 多様体の接空間は Lorentz 計量と呼ばれる非正値な計量を持つが, 非正値な計量を扱う線形代数の本は少ないので, このノートでは正値性を仮定しない計量の定義から始める. 正値な計量と同じ議論の成立する部分も多いが, 微妙な差異もあるので注意されたい.

多様体全般を扱う本として, Spivak [6], 砂田 [7], 和達 [8] を挙げておく. また, Lorentz 多様体については, Oliva [3], O'Neill [4] が詳しい.

1.1 Lorentz 線形空間

n を 2 以上の自然数, V を n 次元 $\mathbb{R}$ 線形空間とする. このノート全体を通して, 体は常に実数体 $\mathbb{R}$ とする.

定義 1.1. V の計量とは, 双線形写像 $h\colon V \times V \to \mathbb{R}$ であって, 次の 2 つの条件を満たすものをいう.

(i) h は対称である. 即ち, 任意の $u, v \in V$ に対し,

$$h(u,v) = h(v,u) \tag{1.1}$$

が成り立つ.

(ii) h は非退化である. 即ち, $u \in V$ で

$$\text{任意の } v \in V \text{ に対し } h(u,v) = 0 \tag{1.2}$$

が成り立つものは $u = 0$ に限る.

線形空間 V とその計量 h の組 (V,h) を計量線形空間という.

定義 1.2. V の計量 h が正値 (若しくは負値) であるとは, 任意の 0 でない $v \in V$ に対し,

$$h(v,v) > 0 \ (\text{若しくは } h(v,v) < 0) \tag{1.3}$$

が成り立つときをいう.

本によっては, 計量の定義に正値であることを仮定する場合がある. しかし, 相対性理論で必要なのは, 正値でない計量なので, このノートで単に計量と言う場合には, 正値性を仮定しないことにする.

定義 1.3. 計量線形空間 (V,h) が次の 2 つの条件を満たすとき Lorentz 線形空間 といい, h を V の Lorentz 計量という.

(i) $v \in V$ で $h(v,v) > 0$ となるものが存在する.

(ii) $v \in V$ で $h(v,v) > 0$ を満たすならば, V の部分空間

$$v^{\perp} := \{u \in V \mid h(v,u) = 0\} \tag{1.4}$$

で $h|_{v^{\perp}}$ は負値な計量となる.

例 1.4. $\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し,

$$h(x, y) := x_1 y_1 - x_2 y_2 - \cdots - x_n y_n \tag{1.5}$$

とおけば, h は $\mathbb{R}^n$ の Lorentz 計量となる. この空間を $\mathbb{R}^n_1$ と書く.

以下, (V, h) を n 次元 Lorentz 線形空間とし, その性質を調べよう. まず, Lorentz 計量を使って, ベクトルを 3 つの種類に分類しよう.

定義 1.5. $v \in V$ とする.

(i) $h(v, v) > 0$ のとき v を時間的という.
(ii) $h(v, v) = 0$ かつ $v \neq 0$ のとき, v を光的という.
(iii) $h(v, v) < 0$ または $v = 0$ のとき, v を空間的という.

命題 1.6. もし $v \in V$ が時間的なベクトルならば, $v^{\perp}$ のベクトルはすべて空間的で, $V = \mathbb{R}v \oplus v^{\perp}$ が成り立つ.

証明は, 定義 1.3 と定義 1.5 から容易に得られる.

さて, Lorentz 線形空間の例として $\mathbb{R}^n_1$ を挙げたが, 次の命題は, Lorentz 線形空間が本質的には $\mathbb{R}^n_1$ ただひとつであることを示している.

命題 1.7. (V, h) を Lorentz 線形空間とする. このとき, 次の条件を満たす基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ が存在する.

$$h(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j = 1, \\ -1 & i = j \neq 1, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{1.6}$$

証明. Schmidt の直交化法を用いる. V は Lorentz 線形空間であるから, ある $v_1 \in V$ で $h(v_1, v_1) > 0$ なるものがとれる. さらに, V の一次独立な元 $v_2, \dots, v_n$ をとり, V の基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を作っておく. はじめに,

$$e_1 := \frac{v_1}{\sqrt{h(v_1, v_1)}} \tag{1.7}$$

とおく. 明らかに $h(e_1, e_1) = 1$ である. 次に,

$$e'_2 := v_2 - h(v_2, e_1)e_1 \tag{1.8}$$

とおく. $h(e'_2, e_1) = 0$ であるから, $e'_2 \in \{e_1\}^{\perp}$. h は $\{e_1\}^{\perp}$ 上負定値であるから, $h(e'_2, e'_2) < 0$ である. ゆえに,

$$e_2 := \frac{e'_2}{\sqrt{-h(e'_2, e'_2)}} \tag{1.9}$$

とおくと, $h(e_2, e_1) = 0$ かつ $h(e_2, e_2) = -1$ を満たす.

以下帰納的に $e_3, \dots$ を構成していく. 今, $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ は条件 (1.6) を満たし, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ が張る空間の基底になっていると仮定する. このとき,

$$e'_{k+1} := v_{k+1} - h(v_{k+1}, e_1)e_1 - h(v_{k+1}, e_2)e_2 - \dots - h(v_{k+1}, e_k)e_k \tag{1.10}$$

とおくと, $h(e'_{k+1}, e_1) = 0$ である. したがって, $h(e'_{k+1}, e'_{k+1}) < 0$.

$$e_{k+1} := \frac{e'_{k+1}}{\sqrt{-h(e'_{k+1}, e'_{k+1})}} \tag{1.11}$$

とおくと, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}\}$ は条件 (1.6) を満たし, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}\}$ が張る空間の基底となる. □

系 1.8. 任意の n 次元 Lorentz 線形空間 (V, h) は $\mathbb{R}^n_1$ と計量同型である.

定義 1.9. 命題 1.7 の条件を満たす基底を Lorentz 正規直交基底と呼ぶ.

最後に, 時間的ベクトルは大きくわけて過去向きと未来向きの 2 つに分類できることを示そう. V 内の時間的なベクトル全体を $\mathcal{T}$ と書くことにする. 即ち,

$$\mathcal{T} := \{v \in V \mid h(v, v) > 0\}. \tag{1.12}$$

補題 1.10. $\mathcal{T}$ は 2 つの連結成分を持つ.

証明. 系 1.8 より, $V = \mathbb{R}^n_1$ としてよい. このとき $\mathcal{T}$ は

$$\mathcal{T} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_1 \;\middle|\; (x_1)^2 - (x_2)^2 - \cdots - (x_n)^2 > 0\right\} \tag{1.13}$$

と書けるが, これは 2 つの連結成分

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^+ &:= \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_1 \;\middle|\; (x_1)^2 - (x_2)^2 - \cdots - (x_n)^2 > 0 \text{ かつ } x_1 > 0\right\}, \\ \mathcal{T}^- &:= \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_1 \;\middle|\; (x_1)^2 - (x_2)^2 - \cdots - (x_n)^2 > 0 \text{ かつ } x_1 < 0\right\}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

に分けられる. □

定義 1.11. V 上の時間的ベクトルの全体 $\mathcal{T}$ の連結成分の一方 $\mathcal{T}^+$ を選ぶことを V の時間的向きづけといい, $\mathcal{T}^+$ を未来錐という. $v \in \mathcal{T}$ が $\mathcal{T}^+$ に属しているとき, v は未来向きであるという.

1.2 Lorentz 多様体

M を滑らかな (即ち C^∞ 級の) n 次元多様体, TM を M の接バンドルとする. このノート全体を通して, 関数, ベクトル場, 微分形式, テンソル場等はすべて滑らかであると仮定する. まず, 接バンドル TM の計量について述べよう.

定義 1.12. g が TM の計量であるとは, 各 $p \in M$ の接空間 T_pM に対し, 定義 1.1 の意味での計量 $g(p)$ が与えられ, さらに $p \mapsto g(p)$ が滑らかであるときをいう. ここで, $p \mapsto g(p)$ が滑らかであるとは, M の各局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ に対し,

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{1.15}$$

とおいたとき, g_{ij} が座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ の滑らかな関数となるときをいう.

TM の計量 g は対称かつ非退化な共変 2 次テンソル場と同一視できる. 詳しく言えば, M の局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ をひとつ取り, g_{ij} を (1.15) で定めると, 行列 $(g_{ij})_{ij}$ は対称かつ非退化で,

$$g = \sum_{ij} g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{1.16}$$

と表現できる.

定義 1.13. g を TM の計量とする.

(i) 各 $p \in M$ の接空間 T_pM の計量 $g(p)$ が定義 1.2 の意味で正値のとき, g を M 上の Riemann 計量, M と g の組 (M, g) を Riemann 多様体と呼ぶ.

(ii) 各 $p \in M$ の接空間 T_pM の計量 $g(p)$ が定義 1.3 の意味での Lorentz 計量となるとき, g を M 上の Lorentz 計量, (M, g) を Lorentz 多様体と呼ぶ.

例 1.14. $M := \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n\right\}$ とし,

$$g := (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - \cdots - (dx^n)^2 \tag{1.17}$$

とおくと, (M, g) は Lorentz 多様体になる.

以下, (M, g) を Lorentz 多様体とする.

定義 1.15. U を M 上のベクトル場する. U が時間的ベクトル場であるとは, 任意の $p \in M$ に対し, 定義 1.5 の意味で $U(p) \in T_pM$ が時間的であるときをいう. 言い替えると, U が時間的ベクトル場であるとは $g(U, U) > 0$ が成り立つときをいう.

例 1.16. 例 1.14 の Lorentz 多様体 (M, g) において,

$$U := \frac{\partial}{\partial x^1} \tag{1.18}$$

とおくと, U は M 上の時間的ベクトル場である.

定義 1.17. M が時間的に向きづけ可能であるとは, M 上の時間的ベクトル場 U が大域的に取れるときをいう. 特に, 時間的ベクトル場 U が存在するとき, 各 $p \in M$ に対し, Lorentz 線形空間 $(T_pM, g(p))$ は定義 1.11 の意味で $U(p)$ が未来向きベクトルとなるように時間的向きをつけることができる. これを M の U による時間的向きづけという.

各 $p \in M$ に対し, T_pM の未来錐を $\mathcal{T}_p^+$ とし,

$$\mathcal{T}^+ := \coprod_{p \in M} \mathcal{T}_p^+, \tag{1.19}$$

と置けば, M 上の錐バンドル $\mathcal{T}^+$ が定義される.

注意 1.18. 任意の Lorentz 多様体が時間的に向きづけ可能とは限らない.

定義 1.19. 時間的に向きづけられた 4 次元 Lorentz 多様体を時空という.

Lorentz 多様体についてはこれ以上深く立ち入らない. さらに詳しく知りたい読者は, Oliva [3], O'Neill [4] および [5] を参照するとよいだろう.

2　種々の時空

この節では, 相対論で登場する代表的な時空を紹介する．具体例として, 特殊相対性理論のモデルである Minkowski 時空, 回転していない天体の周囲の時空を表す Schwarzschild 時空, 一様等方な宇宙を表す Robertson-Walker 時空, インフレーション膨張する宇宙を表す De Sitter 時空について簡単に紹介する．

このノートでは取り上げないが, そのほかに重要な時空として, 回転している天体の周囲の時空を表す Kerr 時空がある．それについては O'Neill [5] が詳しい．

2.1　Minkowski 時空

Minkowski 時空は Minkowski 自身が特殊相対性理論のモデルとして導入したものである．c を光速定数, $M := \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$ とし, M 上の計量を

$$g := c^2 dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{2.1}$$

で定めると, (M, g) は Lorentz 多様体となる．さらに,

$$U := \frac{\partial}{\partial t} \tag{2.2}$$

は M 上の時間的ベクトル場であるから, U が未来向きになるように時間的向きを入れることにより, M は時空となる．この時空を Minkowski 時空, g を Minkowski 計量と呼ぶ．また, 座標 t を Minkowski 時間, (x, y, z) を空間の直交座標という．

直交座標 (x, y, z) から極座標 (r, θ, ϕ) に変換してみよう．$r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$ とし, 座標変換を

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta\cos\phi, \\ z &= r\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{2.3}$$

とおけば, 計量 (2.1) は

$$g = c^2 dt^2 - \left\{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right\} \tag{2.4}$$

と表現できる．

Minkowski 時空内を運動する質点の解析は第 4 節で行う．

2.2　Schwarzschild 時空

Schwarzschild 時空は, 回転していない球対称な天体の周囲の時空を表す最も簡単なモデルである．

a を正の定数とし,

$$M := \left\{(t, r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^4 \ : \ r > a,\, 0 < \theta < \pi,\, 0 < \phi < 2\pi\right\} \tag{2.5}$$

とおく．そして, M 上の計量 g を

$$g := \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{2.6}$$

で定義すれば, (M, g) は 4 次元 Lorentz 多様体となる．さらに, 時間的ベクトル場 $\partial/\partial t$ が未来向きとなるように時間的向きを決めれば, (M, g) は時空となる．この時空を Schwarzschild 時空という．また, 座標 t を Schwarzschild 時間, (r, θ, ϕ) を空間の極座標という．(2.6) の a を形式的に 0 とおけば g は Minkowski 計量 (2.4) に一致する．

式 (2.6) は $r = a$ で定義できないため, このままでは $r < a$ なる部分の時空にまで広げて調べることはできない．しかし, 以下のように, 座標を取り直せば, $0 < r < a$ なる部分にまで Schwarzschild 時空を拡張することができる．

$$\tilde{M} := \left\{(\tilde{u}, \tilde{r}, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \tilde{r} > 0, \, 0 < \theta < \pi, \, 0 < \phi < 2\pi\right\}, \tag{2.7}$$

$$\tilde{g} := \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}}\right) d\tilde{u}^2 - 2\, d\tilde{u}\, d\tilde{r} - \tilde{r}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{2.8}$$

とおくと, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ は Lorentz 多様体となるが, 座標変換

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= ct + r + a \log\left(\frac{r}{a} - 1\right), \\ \tilde{r} &= r \end{aligned} \tag{2.9}$$

により, (M, g) は $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の中に開部分多様体として埋め込まれる．$(\tilde{M}, \tilde{g})$ は $\tilde{r} > a$ なる領域だけでなく $\tilde{r} > 0$ なる領域まで定義されているため, (M, g) の拡張になっている．この座標系 $(\tilde{u}, \tilde{r}, \theta, \phi)$ を Eddington-Finkelstein 座標と呼ぶ．なお, a は Schwarzschild 半径と呼ばれ, $\tilde{r} = a$ は事象の地平面, $0 < \tilde{r} < a$ なる領域はブラックホール内部を表している．

Schwarzschild 時空内を慣性運動する質点の解析は第 4 節で行う．また, Schwarzschild 時空の導出を 第 6 節で行う．

2.3 Robertson-Walker 時空

Robertson-Walker 時空は, 一様等方宇宙を表現するモデルであり, ビッグバン宇宙論で用いられる重要な時空である．

Robertson-Walker 時空について述べる前に, まず 3 次元の Riemann 多様体をひとつ定義しよう．k を定数,

$$N := \left\{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ r > 0, \, 1 - kr^2 > 0, \, 0 < \theta < \pi, \, 0 < \phi < 2\pi\right\} \tag{2.10}$$

とし, N 上の計量を

$$h := \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{2.11}$$

で定めると, (N, h) は Riemann 多様体となる．この多様体 (N, h) を曲率 k の空間という．$k = 0$ ならば (N, h) は 3 次元の Euchlid 空間そのものである．

次に, (N, h) に時間軸を加え, 4 次元の Lorentz 多様体を構成しよう．I を開区間, t を I の座標変数とし, I 上でいたるところ正の値をとる関数 $a(t)$ を考える．このとき, $M := I \times N$ とおき, M の計量を

$$g := c^2 dt^2 - a(t)^2 h \tag{2.12}$$

で定義すると, (M, g) は Lorentz 多様体となる．さらに, $\partial/\partial t$ が未来向きとなるように時間的向きを決めることにより時空が定まる．このように定義された時空 (M, g) をスケール因子 $a(t)$, 曲率 k の Robertson-Walker 時空という．また, 変数 t を宇宙時間と呼ぶ．

スケール因子 $a(t)$ は時空の膨張収縮を表し, $a(t)$ が増加関数ならば膨張宇宙を, 減少関数ならば収縮宇宙となる. 特に, $a(t) \equiv 1$ かつ $k = 0$ ならば Minkowski 時空そのものになることに注意しよう.

第 6 節では, Friedmann によるビッグバン宇宙モデルを導入し, スケール因子 $a(t)$ と曲率 k を決定する.

2.4 De Sitter 時空

De Sitter 時空は, インフレーション膨張する宇宙を表すモデルのひとつである.

$\mathbb{R}^5 = \{(X^0, X^1, X^2, X^3, X^4)\}$ とし, 計量

$$h := (dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 - (dX^4)^2 \tag{2.13}$$

を入れておく. ここで $(\mathbb{R}^5, h)$ の部分多様体として, 次の方程式で表されるものを考える.

$$M := \{(X^0, X^1, X^2, X^3, X^4) \ : \ (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = -l^2\}. \tag{2.14}$$

但し, l は正の定数である. M は $\mathbb{R}^5$ の部分多様体として, h から自然に誘導される計量を持つ. その計量を g とおけば, (M, g) は Lorentz 多様体となる. この (M, g) を De Sitter 時空と呼ぶ.

M に次の式で定義される局所座標 (t, x, y, z) を入れる.

$$\begin{aligned}
X^0 &= l \sinh \frac{ct}{l} - \frac{1}{2l}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \exp\left(\frac{ct}{l}\right), \\
X^1 &= x \exp\left(\frac{ct}{l}\right), \\
X^2 &= y \exp\left(\frac{ct}{l}\right), \\
X^3 &= z \exp\left(\frac{ct}{l}\right), \\
X^4 &= l \cosh \frac{ct}{l} + \frac{1}{2l}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \exp\left(\frac{ct}{l}\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

すると, 計量は

$$g = c^2 dt^2 - \exp\left(\frac{2ct}{l}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.16}$$

と書ける. この計量はスケール因子 $a(t) = \exp(ct/l)$, 曲率 $k = 0$ の Robertson-Walker 計量に一致する. スケール因子の形から, この時空は指数関数オーダーで急膨張を起こしている. この膨張をインフレーション膨張と呼ぶ. すなわち, De Sitter 時空はインフレーション膨張を起こす時空のモデルを与えている.

ここで選んだ座標 (t, x, y, z) をインフレーション座標と呼ぶが, この他にも De Sitter 時空を表現する座標は色々ある. Yoonbai Kim, Chae Young Oh, Namil Park らによる [2] には多くの例が載っている.

3　多様体上の曲線

相対性理論で扱う質点の運動は, Lorentz 多様体上の曲線として表現される．この節では, 多様体上の曲線の定義とそれを解析するための数学的ツールを紹介する．はじめに, 曲線を調べる基本的な道具である接続の概念について触れ, Lorentz 多様体には Levi-Civita 接続と呼ばれる特別な接続構造が入ることを示す．次に, 接続を使って, 曲線の曲がり具合を表す曲率関数を定義し, 曲率関数と曲線を結びつける Frenet の公式を導く．また, 曲線が曲率関数から復元できることを見る．

3.1　接続

M を滑らかな n 次元多様体とする．以下, M 上の関数全体を $\mathcal{F}(M)$, M 上のベクトル場全体を $\mathcal{X}(M)$ で書き表す．

定義 3.1. M 上の接続とは, 双線形写像 $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ であって, 任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ および任意の $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して

(i) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
(ii) $\nabla_X (fY) = (X(f))Y + f \nabla_X Y$

を満たすものをいう．

∇ を局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を使って表示すれば,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.1}$$

と書ける．$\{\Gamma^k_{ij}\}_{ijk}$ を接続係数または Christoffel シンボルと呼ぶ．

定義 3.2. M 上の接続 ∇ が対称であるとは, 任意のベクトル場 X, Y に対し,

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y] \tag{3.2}$$

が成り立つときをいう．

定義 3.3. g を M 上の計量, ∇ を M 上の接続とする．g が ∇ に対して平行であるとは, 任意の M 上のベクトル場 X, Y, Z に対し,

$$X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \tag{3.3}$$

が成り立つときをいう．

定理 3.4. g を M 上の計量とする．このとき, 次の条件を満たす接続 ∇ が一意に存在する．この接続を Levi-Civita 接続という．

(i) ∇ は対称である．
(ii) g は ∇ に対して平行である．

局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ によって g を (1.16) と表現しておくと, Levi-Civita 接続の接続係数は,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{3.4}$$

で求められる.

3.2 曲線に沿うベクトル場

M を n 次元多様体, ∇ を M 上の接続とする.

定義 3.5. I を $\mathbb{R}$ の開区間とするとき, 滑らかな写像 $\alpha : I \to M$ を M 上の (滑らかな) 曲線という.

$(x^1, \ldots, x^n)$ を M の局所座標とすると, 曲線 $\alpha : I \to M$ は I 上の関数 $\alpha^1(\tau), \ldots, \alpha^n(\tau)$ を用いて

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha^1(\tau), \\ &\cdots \\ x^n &= \alpha^n(\tau) \end{aligned} \tag{3.5}$$

と書ける.

以下, I を $\mathbb{R}$ の開区間, τ を I のパラメータ, $\alpha : I \to M$ を M 上の曲線とする. α は I 上のバンドル $I \times_M TM$ および I 上のバンドル写像 $TI \to I \times_M TM$ を誘導する.

定義 3.6. (i) I 上のバンドル $I \times_M TM$ の滑らかな切断を曲線 α に沿うベクトル場という.

(ii) TI の切断 $d/d\tau$ を考える. バンドル写像 $TI \to I \times_M TM$ によるその像は, 曲線 α に沿うベクトル場である. そのベクトル場を $d\alpha/d\tau$ と書く.

$V(\tau)$ を曲線 $\alpha(\tau)$ に沿うベクトル場とする. 局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を使えば, I 上の関数 $V^1(\tau), \ldots, V^n(\tau)$ を用いて

$$V(\tau) = \sum_i V^i(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(\tau)} \tag{3.6}$$

と書ける. 特に, $\alpha(\tau)$ に沿うベクトル場 $d\alpha/d\tau$ は

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \sum_i \frac{d\alpha^i(\tau)}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(\tau)} \tag{3.7}$$

となる.

定義 3.7. $V(\tau)$ を曲線 $\alpha(\tau)$ に沿うベクトル場とする. M の局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ をひとつとり, $\alpha(\tau)$ および $V(\tau)$ を (3.5) および (3.6) のように表示しておく. このとき, $\alpha(\tau)$ に沿う $V(\tau)$ の共変微分 $\nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} V(\tau)$ を

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} V(\tau) := \sum_k \left(\frac{dV^k(\tau)}{d\tau} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k(\alpha(\tau))\frac{d\alpha^i(\tau)}{d\tau}V^j(\tau)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\alpha(\tau)} \tag{3.8}$$

で定義する. 共変微分 $\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} V(\tau)$ は局所座標の取りかたによらないことが容易に示され, 曲線 $\alpha(\tau)$ に沿うベクトル場を定める.

定義 3.8. 曲線 $\alpha(\tau)$ に沿うベクトル場 $V(\tau)$ が接続 ∇ に対して平行であるとは,

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} V(\tau) = 0 \tag{3.9}$$

が成り立つときをいう.

平行なベクトル場 $V(\tau)$ の満たすべき条件は, 局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いて,

$$\frac{dV^k(\tau)}{d\tau} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\alpha(\tau)) \frac{d\alpha^i(\tau)}{d\tau} V^j(\tau) = 0 \tag{3.10}$$

と書ける. これは 1 階線形の常微分方程式であるから, その解は I 全体にまで定義域を延長できる.

命題 3.9. g を M の計量, ∇ を M 上の接続とし, g は ∇ に対し平行であるとする. このとき, 曲線 $\alpha(\tau)$ に沿うベクトル場 $V(\tau)$, $W(\tau)$ に対し

$$\frac{d}{d\tau} g(V(\tau), W(\tau)) = g(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} V(\tau), W(\tau)) + g(V(\tau), \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} W(\tau)) \tag{3.11}$$

が成り立つ. 特に, $V(\tau)$ も $W(\tau)$ も ∇ に対して平行ならば, 写像 $\tau \mapsto g(V(\tau), W(\tau))$ は定数関数である.

さて, これまで曲線に沿うベクトル場について述べたが, 今度は多様体上の曲面と, その曲面に沿うベクトル場について考えよう. U を $\mathbb{R}^2$ の矩形, (τ_1, τ_2) を U のパラメータとする. 滑らかな写像 $s : U \to M$ を M 上の曲面という. s は U 上のバンドル $U \times_M TM$ およびバンドル写像 $TU \to U \times_M TM$ を誘導する.

定義 3.10. (i) バンドル $U \times_M TM$ の滑らかな切断を曲面 s に沿うベクトル場という.

(ii) TU の切断 $\partial/\partial\tau_1$ (若しくは $\partial/\partial\tau_2$) を考える. バンドル写像 $TU \to U \times_M TM$ によるその像はひとつの曲面 s に沿うベクトル場を定める. そのベクトル場を $\partial s/\partial\tau_1$ (若しくは $\partial s/\partial\tau_2$) と書く.

M 上の局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いると曲面 s は U 上の関数 $s^1(\tau_1, \tau_2), \ldots, s^n(\tau_1, \tau_2)$ を用いて

$$\begin{aligned} x^1 &= s^1(\tau_1, \tau_2), \\ &\cdots \\ x^n &= s^n(\tau_1, \tau_2) \end{aligned} \tag{3.12}$$

と書ける. また, $s(\tau_1, \tau_2)$ に沿うベクトル場 $V(\tau_1, \tau_2)$ は U 上の関数 $V^1(\tau_1, \tau_2), \ldots, V^n(\tau_1, \tau_2)$ を用いて

$$V(\tau_1, \tau_2) = \sum_i V^i(\tau_1, \tau_2) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{s(\tau_1, \tau_2)} \tag{3.13}$$

と書ける. 特に

$$\frac{\partial s}{\partial \tau_1} = \sum_i \frac{\partial s^i(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{s(\tau_1, \tau_2)} \tag{3.14}$$

となる. $\partial s/\partial\tau_2$ も同様である.

定義 3.11. 曲面 $s(\tau_1, \tau_2)$ に沿うベクトル場 $V(\tau_1, \tau_2)$ の共変微分を

$$\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}} V(\tau_1, \tau_2) := \sum_k \left(\frac{\partial V^k(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(s(\tau_1, \tau_2)) \frac{\partial s^i(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} V^j(\tau_1, \tau_2) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{s(\tau_1, \tau_2)} \tag{3.15}$$

で定める. この $\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}} V(\tau_1, \tau_2)$ も局所座標の取り方によらず定義され, 曲面 $s(\tau_1, \tau_2)$ に沿うベクトル場となる. $\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_2}} V(\tau_1, \tau_2)$ も同様に定義する.

命題 3.12. M 上の接続 ∇ が対称ならば, 任意の曲面 $s : U \to M$ に対し

$$\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau_2} \right) = \nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_2}} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau_1} \right) \tag{3.16}$$

が成り立つ.

3.3 世界線と Frenet の公式

(M, g) を時間的に向きづけられた Lorentz 多様体, ∇ を g から定まる Levi-Civita 接続とする.

ここでは Lorentz 多様体上の曲線のうち, 世界線と呼ばれるものについて考察する. 特に断らない限り, I を開区間, τ を I のパラメータ, $\alpha : I \to M$ を M 上の曲線とする.

定義 3.13. α が世界線であるとは, 曲線に沿うベクトル場 $d\alpha/d\tau$ が未来向きの時間的ベクトル場となるときをいう.

以下, $\alpha : I \to M$ を世界線とする.

定義 3.14. 世界線 α の速度関数 $\nu^\alpha : I \to \mathbb{R}$ を

$$\nu^\alpha(\tau) := \sqrt{g\left(\frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right)} \tag{3.17}$$

で定める.

定義より, ν^α はいたるところ正の値をとる.

定義 3.15. α の第 1 接触ベクトル場 e_1^α を

$$e_1^\alpha(\tau) := \frac{1}{\nu^\alpha(\tau)} \frac{d\alpha}{d\tau} \tag{3.18}$$

で定める.

e_1^α は, 明らかに α に沿う未来向きの時間的ベクトル場である. また, $g(e_1^\alpha, e_1^\alpha) = 1$ であるから,

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha, e_1^\alpha\right) &= \frac{d}{d\tau} g(e_1^\alpha, e_1^\alpha) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

となり, 従って, $\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha$ は e_1^α に直交する空間的ベクトル場である.

定義 3.16. α の第 1 曲率関数 κ_1^α を

$$\kappa_1^\alpha(\tau) := \frac{1}{\nu^\alpha(\tau)} \sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha\right)} \tag{3.20}$$

で定める.

定義 3.17. 世界線 α が測地線であるとは, α の第 1 曲率関数 κ_1^α が I 上恒等的に 0 になるとき, すなわち,

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha = 0 \tag{3.21}$$

となるときをいう.

次に, 世界線 $\alpha : I \to M$ が測地線とは限らない場合を考えよう．もし, 第 1 曲率関数 κ_1^α が I 上いたるところ正の値をとると仮定すれば, α の第 2 接触ベクトル場 e_2^α が

$$e_2^\alpha := \frac{1}{\kappa_1^\alpha \nu^\alpha} \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha \tag{3.22}$$

で定義できる．明らかに

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha = \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_2^\alpha \tag{3.23}$$

であり,

$$g(e_1^\alpha, e_2^\alpha) = 0, \tag{3.24}$$
$$g(e_2^\alpha, e_2^\alpha) = -1 \tag{3.25}$$

なる事実も容易に確かめられる．さらに, (3.24) から,

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha, e_1^\alpha\right) &= -g\left(e_2^\alpha, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha\right) \\ &= \kappa_1^\alpha \nu^\alpha, \end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.25) から

$$g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha, e_2^\alpha\right) = 0 \tag{3.27}$$

となるので, 結局, $\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha - \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha$ は e_1^α と e_2^α の両方に直交することがわかる．ここで, α の第 2 曲率関数 κ_2^α を

$$\kappa_2^\alpha := \frac{1}{\nu^\alpha} \sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha - \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha - \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha\right)} \tag{3.28}$$

で定義する．もし, I 上 $\kappa_2^\alpha = 0$ ならば,

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha = \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha \tag{3.29}$$

となる．もし, κ_2^α がいたるところ正の値をとると仮定すれば, α の第 3 接触ベクトル場が

$$e_3^\alpha := \frac{1}{\kappa_2^\alpha \nu^\alpha} \left\{\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha - \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha\right\} \tag{3.30}$$

で定義できる．すると,

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha = \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha + \kappa_2^\alpha \nu^\alpha e_3^\alpha \tag{3.31}$$

が成り立つ．また,

$$g(e_i^\alpha, e_3^\alpha) = \begin{cases} 0 & i = 1, 2, \\ -1 & i = 3 \end{cases} \tag{3.32}$$

も容易に確かめられる．

この議論を帰納的に繰り返せば, さらに高次の接触ベクトル場や曲率関数も定義できる．今, 接触ベクトル場と呼ばれる α に沿うベクトル場 $e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha$ が与えられ,

$$g(e_i^\alpha, e_j^\alpha) = \begin{cases} 1 & i = j = 1, \\ -1 & i = j \neq 1, \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{3.33}$$

を満たすとする．また, 曲率関数と呼ばれる I 上いたるところ正の値をとる関数 $\kappa_1^\alpha, \dots, \kappa_{k-1}^\alpha$ が与えられ,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha &= \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_2^\alpha, \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha &= \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha + \kappa_2^\alpha \nu^\alpha e_3^\alpha, \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_3^\alpha &= -\kappa_2^\alpha \nu^\alpha e_2^\alpha + \kappa_3^\alpha \nu^\alpha e_4^\alpha, \\
&\cdots \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_{k-1}^\alpha &= -\kappa_{k-2}^\alpha \nu^\alpha e_{k-2}^\alpha + \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_k^\alpha
\end{aligned} \tag{3.34}$$

なる等式を満たすと仮定する．このとき, (3.33) より,

$$g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha, e_i^\alpha\right) = \begin{cases} \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha & i = k-1 = 1, \\ -\kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha & i = k-1 \neq 1, \\ 0 & i \neq k-1 \end{cases} \tag{3.35}$$

を得る．したがって, $\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha + \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha$ は $e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha$ に直交する．ここで, 第 k 曲率関数を

$$\kappa_k^\alpha := \frac{1}{\nu^\alpha} \sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha + \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha + \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha\right)} \tag{3.36}$$

とおく．もし, I 上 $\kappa_k^\alpha = 0$ ならば

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha = -\kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha \tag{3.37}$$

が成り立つ．もし, κ_k^α が I 上いたるところ正の値をとるならば, 第 $k+1$ 接触ベクトル場を

$$e_{k+1}^\alpha := \frac{1}{\kappa_k^\alpha \nu^\alpha} \left\{\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha + \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha\right\} \tag{3.38}$$

で定めれば, $e_1^\alpha, \dots, e_{k+1}^\alpha$ は (3.33) を満たし,

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha = -\kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha + \kappa_k^\alpha \nu^\alpha e_{k+1}^\alpha \tag{3.39}$$

が成り立つ．以上をまとめると, 次の定理を得る．

定理 3.18 (Frenet の公式)**.** $\alpha : I \to M$ を世界線, ν^α をその速度関数とする．このとき,

(i) (3.18) と (3.33) を満たす α に沿うベクトル場 $e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha$ $(k \leq n)$,
(ii) いたるところ正の値をとる I 上の関数 $\kappa_1^\alpha, \dots, \kappa_{k-1}^\alpha$,
(iii) $e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha$ に直交する α に沿うベクトル場 f,

が存在して, 次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha &= && + \kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_2^\alpha \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_2^\alpha &= +\kappa_1^\alpha \nu^\alpha e_1^\alpha && + \kappa_2^\alpha \nu^\alpha e_3^\alpha \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_3^\alpha &= && - \kappa_2^\alpha \nu^\alpha e_2^\alpha + \kappa_3^\alpha \nu^\alpha e_4^\alpha \\
&\cdots \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_{k-1}^\alpha &= && - \kappa_{k-2}^\alpha \nu^\alpha e_{k-2}^\alpha + \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_k^\alpha \\
\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_k^\alpha &= && - \kappa_{k-1}^\alpha \nu^\alpha e_{k-1}^\alpha + f.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

この定理の仮定のもとで, さらに

$$\kappa_k^\alpha := \frac{1}{\nu^\alpha}\sqrt{-g(f,f)} \tag{3.41}$$

とおく. $\kappa_k^\alpha = 0$ であることと $f = 0$ であることとは同値である.

定義 3.19. e_i^α を 第 i 接触ベクトル場, κ_i^α を第 i 曲率関数と呼ぶ.

定理 3.20. I は開区間で, $0 \in I$ とする. そして, ν, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{k-1}$ $(k \leq n)$ を開区間 I 上で定義されたいたるところ正の値をとる関数と仮定する. このとき, $a \in M$, $e_1, \ldots, e_k \in T_aM$ が

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j = 1, \\ -1 & i = j \neq 1, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{3.42}$$

を満たし, e_1 が未来向きならば, 0 の近傍で定義された世界線 $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で次の条件を満たすものが一意的に存在する.

(i) $\alpha(0) = a$,

(ii) ν は α の速度関数, 即ち, $\nu^\alpha = \nu$,

(iii) κ_i は α の第 i 曲率関数, 即ち, $\kappa_i^\alpha = \kappa_i \quad (i = 1, \ldots, k-1)$,

(iv) $\kappa_k^\alpha = 0$,

(v) $e_i^\alpha(0) = e_i \quad (i = 1, \ldots, k)$.

証明. 方針だけを簡単に述べる. (3.18) と (3.40) の $f = 0$ とおいたものは α, $e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha$ を未知関数とする常微分方程式と見なせる. 常微分方程式の解の存在定理より, (i), (v) を初期条件とする解が一意的に存在する. あとは, $e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha$ が (3.33) を満たすことを確かめればよい. そのためには,

$$\frac{d}{d\tau} g\left(e_i^\alpha, e_j^\alpha\right) = g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_i^\alpha, e_j^\alpha\right) + g\left(e_i^\alpha, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_j^\alpha\right) \tag{3.43}$$

なる恒等式を考える. すると, (3.40) より, $g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)$ は定数関数になることがわかる. ところが $e_1, \ldots, e_k$ は (3.42) を満たすから, $e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha$ も (3.33) を満たさなければならない. 証明の詳細は Spivak [6] の第 4 巻, 第 7 章を参照せよ. $\square$

4　相対論的力学

この節では, 前節の結果を用いて, 時空内の質点運動を解析する．はじめに, 質点の運動の定義, その速度や加速度について述べた後, 例として Minkowski 時空内の慣性運動と等加速度直進運動について考察する．また, Schwarzschild 時空内で慣性運動する質点の運動についても調べる．最後に, 相対論的な質点の運動方程式を与え, 応用として荷電粒子が電磁場から受ける Lorentz 力を考える．

4.1　質点の運動

(M, g) を時空, ∇ を g から誘導された Levi-Civita 接続とする．

定義 4.1. I を開区間, τ を I のパラメータ, $\alpha : I \to M$ を M 上の世界線とする．α の速度関数 ν^α がいたるところ光速定数 c をとるとき, α を質点の運動 (または単に運動) という．また, パラメータ τ を質点の固有時, $\alpha(\tau)$ を固有時 τ における質点の事象という．

定義より, 世界線 $\alpha : I \to M$ が質点の運動となることと

$$g\left(\frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right) = c^2 \tag{4.1}$$

を満たすこととは同値である．条件 (4.1) を運動の条件と呼ぶ.

以下, $\alpha : \tau \mapsto \alpha(\tau)$ を質点の運動とする．

定義 4.2. α に沿うベクトル場 $\frac{d\alpha}{d\tau}$ を質点の 4 元速度, $\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}$ を質点の 4 元加速度という．4 元速度は未来向きの時間的ベクトル場であり, その大きさは運動の条件 (4.1) より常に光速定数 c である．

命題 4.3. $\alpha : I \to M$ を質点の運動とする．このとき, α の 4 元加速度は 4 元速度に直交する空間的ベクトル場であり,

$$\sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}\right)} = \kappa_1^\alpha c^2 \tag{4.2}$$

が成り立つ．但し, κ_1^α は α の第 1 曲率関数である．

証明. 運動の条件 (4.1) を τ で微分することにより

$$2g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right) = 0 \tag{4.3}$$

が得られる．したがって, α の 4 元加速度は 4 元速度と直交する空間的ベクトル場である．また, Frenet の公式より,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}\right)} &= c\sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} e_1^\alpha\right)} \\ &= \kappa_1^\alpha c^2 \sqrt{-g\left(e_2^\alpha, e_2^\alpha\right)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となるので, (4.2) が従う．　□

定義 4.4. Lorentz 多様体 M 上の運動 $\alpha : I \to M$ が慣性運動であるとは, α の第 1 曲率関数 κ_1^α がいたるところ 0 になるときをいう. これは, 定義 3.17 より, 運動 $\alpha : I \to M$ が測地線であること, 即ち,

$$\frac{1}{c}\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}}\frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \tag{4.5}$$

を満たすことと同値である.

定義 4.5. Lorentz 多様体 M 上の運動 $\alpha : I \to M$ が等加速度直進運動であるとは, α の 第 1 曲率関数 κ_1^α が正の一定値をとり, かつ第 2 曲率関数 κ_2^α がいたるところ 0 になるときをいう.

4.2 Minkowski 時空内の運動

$M := \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$ とし, 計量 g が (2.1) により定義される Minkowski 時空内を運動する質点について考えよう. 簡単のため, 質点は $y = z = 0$ に束縛されていると仮定する.

例 4.6. Minkowski 時空の慣性運動を決定しよう. 求める運動を $\alpha : \tau \mapsto (t(\tau), x(\tau))$ とおくと, これは条件 (4.5) を満たさなくてはならない. この条件は, 座標 (t, x) を使うと,

$$\frac{1}{c}\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{c}\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0 \tag{4.7}$$

と書ける. 運動の条件

$$c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = c^2 \tag{4.8}$$

に注意して, 微分方程式を解くと, 解

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + t_0, \tag{4.9}$$

$$x = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + x_0 \tag{4.10}$$

を得る. 但し, v ($|v| < c$), t_0, x_0 は定数である. α の軌跡を $x = x(t)$ で表したとき,

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{4.11}$$

となることから, v を相対論的速度と呼ぶこともある.

例 4.7. Minkowski 時空の等加速度直進運動を決定しよう. 求める運動を $\alpha : \tau \mapsto (t(\tau), x(\tau))$ とおく. 今, その運動の加速度の大きさを

$$a := \sqrt{-g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}}\frac{d\alpha}{d\tau}, \nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}}\frac{d\alpha}{d\tau}\right)} \tag{4.12}$$

とおくと, 命題 4.3 より. $a = \kappa_1^\alpha c^2$ が成り立つ. 仮定より, κ_1^α は正の定数なので, a も正の定数である. (3.40) より, 等加速度直進運動の満たすべき方程式は

$$\frac{1}{a}\nabla^2_{\frac{d\alpha}{d\tau}}\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{a}{c^2}\frac{d\alpha}{d\tau} \tag{4.13}$$

となる．この方程式を (t,x) 座標で書き表すと

$$\frac{1}{a}\frac{d^3t}{d\tau^3}=\frac{a}{c^2}\frac{dt}{d\tau}, \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{a}\frac{d^3x}{d\tau^3}=\frac{a}{c^2}\frac{dx}{d\tau} \tag{4.15}$$

となる．運動の条件 (4.8) に注意して微分方程式を解くと, 解

$$t=\frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a(\tau+\tau_0)}{c}\right)+t_0, \tag{4.16}$$

$$x=\pm\frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a(\tau+\tau_0)}{c}\right)+x_0 \tag{4.17}$$

を得る．但し, τ_0, t_0, x_0 は定数である．

4.3 Schwarzschild 時空内の運動

計量 (2.6) で定義される Schwarzschild 時空内の慣性運動について考えよう．簡単のため, 質点は $\theta=\pi/2$ 平面上に束縛されていると仮定する．このとき, 質点の運動は, 世界線 $\alpha:\tau\mapsto(t(\tau),r(\tau),\phi(\tau))$ で表され, 運動の条件

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=c^2 \tag{4.18}$$

を満たす．さらに, 質点の運動が慣性運動であることから, 世界線は測地線であり, その方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{d\tau^2}+\frac{a}{r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}&=0,\\ \frac{d^2r}{d\tau^2}+\frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2&\\ -r\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2&=0,\\ \frac{d^2\phi}{d\tau^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}&=0\end{aligned} \tag{4.19}$$

である．質点の運動を調べるには, (4.19) を直接解くより, 次の物理量に着目するとよい．

定義 4.8. エネルギー E および角運動量 L を

$$E:=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right\}-\frac{c^2a}{2r}, \tag{4.20}$$

$$L:=r^2\frac{d\phi}{d\tau} \tag{4.21}$$

で定める．

命題 4.9. Schwarzschild 時空内を慣性運動する質点は, エネルギー E および 角運動量 L を保存する．

証明. まず, E が保存することを示そう. 運動の条件 (4.18) より

$$E = \frac{c^2}{2}\left\{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right\} \tag{4.22}$$

と変形できる. 両辺を τ で微分すると

$$\frac{dE}{d\tau} = \left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{ac^2}{r^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{dr}{d\tau} + \left(1-\frac{a}{r}\right)^2 c^2 \frac{dt}{d\tau}\frac{d^2t}{d\tau^2} \tag{4.23}$$

となる. (4.19) より右辺は 0 となるので, E は保存量である. L が保存することを示すには, 同じようにして $dL/d\tau = 0$ を確かめればよい. これは容易である. □

$L \neq 0$ と仮定して, 質点の運動を調べよう. このとき, $d\phi/d\tau \neq 0$ だから, 陰関数定理より質点の軌道を $r = r(\phi)$ という関数で与えることができる.

$$\frac{dr}{d\phi} = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)\Big/\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \tag{4.24}$$

が成り立つから, (4.20) および (4.21) より τ を消去すると,

$$\frac{2E}{L^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{ac^2}{L^2 r} + \frac{1}{r^2} - \frac{a}{r^3} \tag{4.25}$$

なる式を得る. 座標変換

$$u := \frac{1}{r} \tag{4.26}$$

を用いて方程式 (4.25) を書き換えると,

$$\frac{2E}{L^2} = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{ac^2}{L^2}u + u^2 - au^3 \tag{4.27}$$

となる. さらに, 両辺を ϕ で微分することにより,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{ac^2}{2L^2} - u + \frac{3}{2}au^2 \tag{4.28}$$

を得る.

定義 4.10. (4.28) を軌道方程式という.

例 4.11. 軌道方程式を実際に解いてみよう. まず, u が ϕ に依存せず一定値 u_0 をとる場合を考える. $du/d\phi = 0$ に注意すれば,

$$\frac{ac^2}{2L^2} - u_0 + \frac{3}{2}au_0^2 = 0 \tag{4.29}$$

を得る. これを解くと

$$u_0 = \frac{1}{3a} - \sqrt{\left(\frac{1}{3a}\right)^2 - \frac{c^2}{3L^2}} \tag{4.30}$$

となる.

次に, u が ϕ に依存する一般の場合を考える．軌道方程式を厳密に解くのは難しいので, u が u_0 からわずかにずれる場合を近似的に解くことにしよう．(4.28) は

$$\frac{d^2(u-u_0)}{d\phi^2} = -(1-3au_0)(u-u_0) + \frac{3}{2}a(u-u_0)^2 \tag{4.31}$$

と変形できる．この右辺の最後の項は極めて小さいと考え, それを取り除いた方程式

$$\frac{d^2(u-u_0)}{d\phi^2} = -(1-3au_0)(u-u_0) \tag{4.32}$$

を解き, その解を (4.28) の近似解とみなすのである．(4.32) を解くと

$$u = u_0 + A\cos\left(\sqrt{1-3au_0}\phi\right) \tag{4.33}$$

の形になる．但し, A は定数である．ϕ の係数 $\sqrt{1-3au_0}$ が 1 と若干異なることから近日点移動が起きていることが読み取れる．

例 4.12. 質量 m の天体の Schwarzschild 半径 a を決定しよう．$L=0$ と仮定すると, (4.21) より $d\phi/d\tau=0$. これを (4.20) に代入すれば

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{c^2 a}{2r} \tag{4.34}$$

となる．これは, 古典力学におけるエネルギー式に一致する．右辺の最初の項が運動エネルギー, 右辺の最後の項がポテンシャルである．一方, 質量 m の天体が発生する重力ポテンシャル関数は, 万有引力定数 G を用いて $-Gm/r$ と書けるから, ポテンシャル関数の比較により,

$$a = \frac{2Gm}{c^2} \tag{4.35}$$

を得る．これが求める Schwarzschild 半径である．

このノートでは省略するが, O'Neill [4] には軌道の安定性の解説もある．

4.4 運動方程式

(M,g) を時空, $\mathcal{T}^+$ をその未来錐バンドル, ∇ を g から誘導された Levi-Civita 接続とする．

定義 4.13. 滑らかな写像 $f:\mathcal{T}^+ \to TM$ が次の条件を満たすとき, 4 元力という．

(i) 任意の $x\in M$ に対し, $f(\mathcal{T}_x^+)\subset T_xM$.
(ii) 任意の $x\in M$ に対し, $v\in\mathcal{T}_x^+$, $a\in\mathbb{R}^+$ ならば $f(av)=af(v)$.
(iii) 任意の $x\in M$ に対し, $v\in\mathcal{T}_x^+$ ならば $g(v,f(v))=0$.

今, 静止質量 m をもつ質点 α を考え, 4 元力 f で与えられる力を受けると仮定する．このとき, 質点の運動は次の方程式で与えられる．

$$m\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}}\frac{d\alpha}{d\tau} = f\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right). \tag{4.36}$$

定義 4.14. (4.36) を質点の 4 元運動方程式という．

方程式 (4.36) は 2 階の常微分方程式であるから, 次に述べる 2 つの初期条件を与えれば, 質点の運動が一意的に決まる.

初期条件の一つは, 固有時 $\tau = 0$ のときの質点 α の事象 $p \in M$ を与えることである. 即ち,

$$\alpha(0) = p \tag{4.37}$$

である.

初期条件のもう一つは, 固有時 $\tau = 0$ のときの質点の初速度 $\xi \in \mathcal{T}_p^+$ を与えることである. 即ち,

$$\left.\frac{d\alpha}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \xi \tag{4.38}$$

である. 但し, 初速度 ξ は条件

$$g(\xi, \xi) = c^2 \tag{4.39}$$

を満たすものでなければならない.

初期条件 (4.37), (4.38) を決めれば, 運動方程式 (4.36) の解 α は一意に決まるが, 運動の条件 (4.1) を満たすことを別途確認しなければならない. まず, (4.36) より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} g\left(\frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right) &= 2g\left(\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right) \\
&= \frac{2}{m} g\left(f\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right), \frac{d\alpha}{d\tau}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, (4.39) より

$$\begin{aligned}
\left. g\left(\frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} &= g(\xi, \xi) \\
&= c^2
\end{aligned}$$

であるから, α は (4.1) を満たす. また, ξ が未来向きであることから, 連続性により $d\alpha/d\tau$ も未来向きである.

例 4.15 (Lorentz 力)**.** 荷電粒子は電磁場により, Lorentz 力と呼ばれる力を受ける. その荷電粒子の運動を記述する運動方程式を求めよう. 荷電粒子の静止質量を m, 静止電荷を q とする.

まず, M 内の電磁場は Faraday テンソルと呼ばれる 2 次微分形式 F で表現される. この F に対し, つぎの条件を満たすバンドル写像 $W : TM \to TM$ が一意に存在する.

任意の $x \in M$, $u, v \in T_xM$ に対し, $g(W(u), v) = F(u, v)$.

そのとき, 写像 $f : \mathcal{T}^+ \to TM$ を

$$f(v) := qW(v)$$

で定義すると, f は定義 4.13 の条件を満たしている. これを Lorentz 力という. したがって, 荷電粒子に Lorentz 力のみが働いてる場合の 4 元運動方程式は

$$m\nabla_{\frac{d\alpha}{d\tau}} \frac{d\alpha}{d\tau} = qW\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right) \tag{4.40}$$

となる．

M が Minkowski 時空の場合に, 方程式 (4.40) を座標を用いて具体的に書き表そう．座標を (t, x^1, x^2, x^3) とし, 計量を

$$g := c^2(dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{4.41}$$

で定めれば, これは明らかに Minkowski 時空である．また, Faraday テンソル F を座標表示すると

$$\begin{aligned} F = &- dt \wedge (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \\ &+ B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \tag{4.42}$$

となる．但し, (E_1, E_2, E_3) は電場, (B_1, B_2, B_3) は磁束密度である．すると, 式 (4.40) は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2t}{d\tau^2} &= \frac{q}{c^2}\left\{\frac{dx^1}{d\tau}E_1 + \frac{dx^2}{d\tau}E_2 + \frac{dx^3}{d\tau}E_3\right\}, \\ m\frac{d^2x^1}{d\tau^2} &= q\left\{\frac{dt}{d\tau}E_1 + \frac{dx^2}{d\tau}B_3 - \frac{dx^3}{d\tau}B_2\right\}, \\ m\frac{d^2x^2}{d\tau^2} &= q\left\{\frac{dt}{d\tau}E_2 + \frac{dx^3}{d\tau}B_1 - \frac{dx^1}{d\tau}B_3\right\}, \\ m\frac{d^2x^3}{d\tau^2} &= q\left\{\frac{dt}{d\tau}E_3 + \frac{dx^1}{d\tau}B_2 - \frac{dx^2}{d\tau}B_1\right\} \end{aligned} \tag{4.43}$$

と書ける．

5 多様体の曲率

この節では, 次節で述べる Einstein 方程式の記述に必要な数学的準備として, 曲率テンソル場や Ricci テンソル場について簡単に説明する. テンソル場を詳しく扱っている本として, Oliva [3], Spivak [6], 砂田 [7] を挙げておく.

5.1 接続のテンソル場への拡張

M を n 次元多様体とする. M 上の k 次微分形式全体を $\mathcal{A}^k(M)$, M 上の外微分作用素を $d:\mathcal{A}^k(M)\to\mathcal{A}^{k+1}(M)$ で書き表す. また, M 上の反変 p 次共変 q 次テンソル場全体を $\mathcal{T}^{(p,q)}(M)$ と書き, i 番目の反変成分と j 番目の共変成分の縮約写像を $\mathrm{Tr}_{ij}:\mathcal{T}^{(p,q)}(M)\to\mathcal{T}^{(p-1,q-1)}(M)$ で表すものとする.

いま, M 上の (定義 3.1 の意味での) 接続 ∇ が与えられているとする. この接続 ∇ はベクトル場に対して作用するが, 次の定理により, テンソル場に対しても作用するように拡張できる.

定理 5.1. 次の条件を満たす双線形写像 $\nabla:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{T}^{(p,q)}(M)\to\mathcal{T}^{(p,q)}(M)$ が一意的に存在する.

(i) $f\in\mathcal{F}(M)$, $X\in\mathcal{X}(M)$ ならば $\nabla_X f = X(f)$.

(ii) $X\in\mathcal{X}(M)$, $Y\in\mathcal{T}^{(1,0)}(M)$ ならば $\nabla_X Y$ は定義 3.1 の接続と一致する.

(iii) $f\in\mathcal{F}(M)$, $X\in\mathcal{X}(M)$, $T\in\mathcal{T}^{(p,q)}(M)$ ならば $\nabla_{fX}T = f\nabla_X T$.

(iv) $X\in\mathcal{X}(M)$, $T_1\in\mathcal{T}^{(p_1,q_1)}(M)$, $T_2\in\mathcal{T}^{(p_2,q_2)}(M)$ ならば

$$\nabla_X(T_1\otimes T_2) = (\nabla_X T_1)\otimes T_2 + T_1\otimes(\nabla_X T_2). \tag{5.1}$$

(v) $X\in\mathcal{X}(M)$, $T\in\mathcal{T}^{(p,q)}(M)$ ならば $\nabla_X \mathrm{Tr}_{ij}\, T = \mathrm{Tr}_{ij}\,\nabla_X T$.

以下, 接続 ∇ は定理 5.1 の条件を満たすようにテンソル場に対してまで拡張されているものとする.

例 5.2. g を M 上の計量とする. g は共変 2 次テンソル場と見なせるから, $X\in\mathcal{X}(M)$ に対し $\nabla_X g$ が定義できる. これは, 定理 5.1 より

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y,\nabla_X Z) \tag{5.2}$$

と書ける. 定義 3.3 を思い出せば, g が ∇ に対して平行であることと, 任意の $X\in\mathcal{X}(M)$ に対して $\nabla_X g = 0$ が成り立つこととは同値である.

定義 5.3. $\mathrm{Div}:\mathcal{T}^{(1,q)}(M)\to\mathcal{T}^{(0,q)}(M)$ を

$$(\mathrm{Div}\, T)(X_1,\ldots,X_q) := \mathrm{Tr}_{\alpha,X}(\nabla_X T)(\alpha, X_1,\ldots,X_q) \tag{5.3}$$

で定義し, $T\in\mathcal{T}^{(1,q)}(M)$ の発散と呼ぶ. 但し, $\alpha\in\mathcal{A}^1(M)$, $X_1,\ldots,X_p\in\mathcal{X}(M)$ である.

例 5.4. U を M 上のベクトル場とする. 局所座標 $(x^1,\ldots,x^n)$ を用いて,

$$U = \sum_i U^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.4}$$

と表示しておくと, $\mathrm{Div}\, U$ は接続係数 $\{\Gamma_{ij}^k\}_{ijk}$ を用いて

$$\mathrm{Div}\, U = \sum_i \left(\frac{\partial U^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^i U^j \right) \tag{5.5}$$

と書ける.

5.2 曲率テンソル場

∇ を M 上の接続とする. このとき, X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$ に対し,

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{5.6}$$

とおくことにより, 双線形写像 $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ が定まる. この R に対し, 次の補題が成り立つ.

補題 5.5. R は $\mathcal{A}^1(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{F}(M)$ への $\mathcal{F}(M)$ 加群の準同型写像

$$(\alpha, X, Y, Z) \mapsto \alpha(R(X,Y)Z) \tag{5.7}$$

を引き起こす. したがって, R は反変 1 次共変 3 次のテンソル場と見なせる.

この証明は定義から直接確かめればよい.

定義 5.6. 補題 5.5 より得られる反変 1 次共変 3 次のテンソル場 R を ∇ の曲率テンソル場と呼ぶ.

以下, R を ∇ の曲率テンソル場とする. この R を局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ を使って表現してみよう.

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{5.8}$$

とおく. すると, 曲率テンソル係数 $\{R_{ijk}^l\}_{ijkl}$ は, ∇ の接続係数 $\{\Gamma_{ij}^k\}_{ijk}$ を用いて

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \tag{5.9}$$

と書ける.

定理 5.7. U を $\mathbb{R}^2$ の矩形, (τ_1, τ_2) を U のパラメータ, $s : U \to M$ を M 上の曲面とする. このとき, 任意の曲面 s に沿うベクトル場 $V(\tau_1, \tau_2)$ に対し

$$\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}} \nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_2}} V - \nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_2}} \nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}} V = R\left(\frac{\partial s}{\partial \tau_1}, \frac{\partial s}{\partial \tau_2} \right) V(\tau_1, \tau_2) \tag{5.10}$$

が成り立つ.

この定理より, 曲率テンソル場は, $\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}} \nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_2}}$ と $\nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_2}} \nabla_{\frac{\partial s}{\partial \tau_1}}$ の差がどれだけあるかを表しているといえる.

定理 5.8. X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.

(ii) 接続 ∇ が対称ならば $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.

後者の式は第 1 Bianchi 恒等式と呼ばれる. 証明は, 曲率テンソル場の定義を用いて直接確認すればよい.

定理 5.9. g を M 上の計量, X, Y, Z, $W \in \mathcal{X}(M)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) g が ∇ に対して平行ならば $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$.

(ii) ∇ が g から誘導された Levi-Civita 接続ならば $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.

(i) の証明は定義に当てはめればよい. (ii) を示すには, (i) と定理 5.8 の (ii) を組み合わせればよい.

R は反変 1 次共変 3 次のテンソル場であるから, $X \in \mathcal{X}(M)$ に対し $\nabla_X R$ を考えることができる. これは, Y, Z, $W \in \mathcal{X}(M)$ に対し,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W := \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)(\nabla_X W) \tag{5.11}$$

と定義しても同じである.

局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ を用いて $\nabla_X R$ を具体的に書いてみよう.

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} = \sum_m (\nabla_i R)^m_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^m} \tag{5.12}$$

と表示しておけば,

$$(\nabla_i R)^m_{jkl} = \frac{\partial R^m_{jkl}}{\partial x^i} + \sum_n \Gamma^m_{in} R^n_{jkl} - \sum_n \Gamma^n_{ij} R^m_{nkl} - \sum_n \Gamma^n_{ik} R^m_{jnl} - \sum_n \Gamma^n_{il} R^m_{jkn} \tag{5.13}$$

と書ける.

定理 5.10 (第 2 Bianchi 恒等式)**.** もし接続 ∇ が対称ならば, 任意の X, Y, Z, $W \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0 \tag{5.14}$$

が成り立つ.

証明は, (5.11) を用いて直接計算すればよい.

5.3 Ricci テンソル場

以下, g を M 上の計量, ∇ を g から誘導された Levi-Civita 接続とする.

定義 5.11. R を ∇ の曲率テンソル場とする. このとき, 共変 2 次テンソル場 Ric を

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{Tr}_{\gamma,Z}\, \gamma(R(X,Z)Y) \tag{5.15}$$

で定義する. これを Ricci テンソル場と呼ぶ.

命題 5.12. Ric は対称である. 即ち, 任意のベクトル場 X, Y に対し $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$ が成り立つ.

証明. 定理 5.9 の (ii) より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= \mathrm{Tr}_{\gamma,Z}\,\gamma(R(X,Z)Y)\\ &= \mathrm{Tr}_{\gamma,Z}\,\mathrm{Tr}_{\delta,W}\,g^{-1}(\gamma,\delta)g(R(X,Z)Y,W)\\ &= \mathrm{Tr}_{\gamma,Z}\,\mathrm{Tr}_{\delta,W}\,g^{-1}(\gamma,\delta)g(R(Y,W)X,Z)\\ &= \mathrm{Tr}_{\delta,W}\,\delta(R(Y,W)X)\\ &= \mathrm{Ric}(Y,X).\end{aligned} \tag{5.16}$$

□

定義 5.13. M 上の反変 1 次共変 1 次テンソル場 $\overline{\mathrm{Ric}}$ を

$$\overline{\mathrm{Ric}}(\alpha,X) := \mathrm{Tr}_{\beta,Y}\,g^{-1}(\alpha,\beta)\,\mathrm{Ric}(X,Y) \tag{5.17}$$

で定める. さらに, M 上の関数 S を

$$S := \mathrm{Tr}_{\alpha,X}\,\overline{\mathrm{Ric}}(\alpha,X) \tag{5.18}$$

で定義する. S をスカラー曲率と呼ぶ.

例 5.14. 多様体 N を (2.10), 計量 h を (2.11) と同じものとする. このときの Riemann 多様体 (N,h) のスカラー曲率は $6k$ となる.

定理 5.15. 次の関係が成り立つ.

$$dS = 2\,\mathrm{Div}\,\overline{\mathrm{Ric}} \tag{5.19}$$

但し, d は外微分作用素である.

この定理の証明を述べる前に, 補題をひとつ与える.

補題 5.16. g を M の計量とする. もし g が ∇ に対して平行ならば, X, Y, Z, W, $V \in \mathcal{X}(M)$ に対して,

$$g((\nabla_Z R)(X,Y)W,V) = -g((\nabla_Z R)(X,Y)V,W) \tag{5.20}$$

が成り立つ.

この補題の証明は, 式 (5.11) と定理 5.9 を直接適用すればよい.

定理 5.15 の証明. 定理 5.10 に $\mathrm{Tr}_{\gamma,Z}\,\gamma(\cdot)$ を施すと

$$(\nabla_X \mathrm{Ric})(Y,W) - (\nabla_Y \mathrm{Ric})(X,W) + \mathrm{Tr}_{\gamma,Z}\,\gamma((\nabla_Z R)(X,Y)W) = 0 \tag{5.21}$$

となる. さらに, $\mathrm{Tr}_{\beta,Y}\,\mathrm{Tr}_{\delta,W}\,g^{-1}(\beta,\delta)$ を施すと

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\beta,Y}\,\mathrm{Tr}_{\delta,W}\,g^{-1}(\beta,\delta)(\nabla_X \mathrm{Ric})(Y,W) &= \mathrm{Tr}_{\beta,Y}\,\mathrm{Tr}_{\delta,W}(\nabla_X(g^{-1}\otimes\mathrm{Ric}))(\beta,\delta,Y,W)\\ &= \mathrm{Tr}_{\beta,Y}(\nabla_X\overline{\mathrm{Ric}})(\beta,Y)\\ &= \nabla_X S\\ &= (dS)(X),\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_{\beta,Y}\operatorname{Tr}_{\delta,W} g^{-1}(\beta,\delta)(\nabla_Y \operatorname{Ric})(X,W) &= \operatorname{Tr}_{\beta,Y}\operatorname{Tr}_{\delta,W} \nabla_Y (g^{-1}\otimes \operatorname{Ric})(\beta,\delta,X,W) \\
&= \operatorname{Tr}_{\beta,Y} \nabla_Y (\overline{\operatorname{Ric}}(\beta,X)) \\
&= (\operatorname{Div}\overline{\operatorname{Ric}})(X),
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

を得る. さらに, 補題 5.16 より

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}_{\beta,Y}\operatorname{Tr}_{\delta,W}\operatorname{Tr}_{\gamma,Z} g^{-1}(\beta,\delta)\gamma((\nabla_Z R)(X,Y)W) \\
&= \operatorname{Tr}_{\beta,Y}\operatorname{Tr}_{\delta,W}\operatorname{Tr}_{\gamma,Z}\operatorname{Tr}_{\epsilon,V} g^{-1}(\beta,\delta)g^{-1}(\gamma,\epsilon)g((\nabla_Z R)(X,Y)W,V) \\
&= -\operatorname{Tr}_{\beta,Y}\operatorname{Tr}_{\delta,W}\operatorname{Tr}_{\gamma,Z}\operatorname{Tr}_{\epsilon,V} g^{-1}(\beta,\delta)g^{-1}(\gamma,\epsilon)g((\nabla_Z R)(X,Y)V,W) \\
&= -\operatorname{Tr}_{\beta,Y}\operatorname{Tr}_{\gamma,Z}\operatorname{Tr}_{\epsilon,V} g^{-1}(\gamma,\epsilon)\beta((\nabla_Z R)(X,Y)V) \\
&= -\operatorname{Tr}_{\gamma,Z}\operatorname{Tr}_{\epsilon,V} g^{-1}(\gamma,\epsilon)(\nabla_Z \operatorname{Ric})(X,V) \\
&= -(\operatorname{Div}\overline{\operatorname{Ric}})(X)
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

となる. ゆえに, (5.19) が成り立つ. □

6　時空の構造

ある計量で定義される時空と, その時空を流れる物質を考える. 時空の計量は物質の流れを決定し, その流れは流体の運動方程式によって記述される. さらに, Einstein は時空の計量そのものを決める方程式を導入した. その方程式を Einstein 方程式と呼ぶ. この節では, 物質の流れをモデル化し, Einstein 方程式について述べる. その応用として, 静的かつ球対称であるような Ricci 平坦な時空が Schwarzschild 時空になることを示す. 最後に, ビッグバン宇宙論の Friedmann モデルを考え, Robertson-Walker 時空のスケール因子と曲率を決定する.

6.1　Einstein 方程式

(M, g) を時空とする.

定義 6.1. 時空 (M, g) を流れる物質 (以後, 流体という) は, 静止質量密度と呼ばれる M 上の関数 ρ と 4 元速度と呼ばれる M 上の未来向きの時間的ベクトル場 U の組 (ρ, U) で表現される. ここで, U は運動の条件

$$g(U, U) = c^2 \tag{6.1}$$

を満たしている.

今, 計量 g を既知とし, 流体 (ρ, U) は未知とする. この流体 (ρ, U) を決定する方程式を与えよう. エネルギー運動量テンソル場と呼ばれる共変 2 次のテンソル場 T を

$$T(X, Y) := \rho g(U, X) g(U, Y) \tag{6.2}$$

で定義する. T は定義より明らかに対称である. さらに, 反変 1 次共変 1 次テンソル場 $\overline{T}$ を

$$\begin{aligned} \overline{T}(\beta, Y) &:= \mathrm{Tr}_{\alpha, X}\, g^{-1}(\alpha, \beta) T(X, Y) \\ &= \rho \beta(U) g(U, Y) \end{aligned} \tag{6.3}$$

で定める. このとき, 流体 (ρ, U) は運動の条件 (6.1) と次の等式を満たす.

$$\mathrm{Div}\, \overline{T} = 0 \tag{6.4}$$

定義 6.2. 式 (6.4) を流体の 4 元運動方程式という.

命題 6.3. 流体 (ρ, U) は運動の条件 (6.1) を満たすと仮定する. このとき, (ρ, U) が 4 元運動方程式 (6.4) を満たすことと, 次の 2 つの条件が成り立つこととは同値である.

(i) $U(\rho) + \rho\, \mathrm{Div}\, U = 0$,
(ii) $\rho \nabla_U U = 0$.

(i) を質量保存の法則または連続の方程式, (ii) を流体の運動方程式という.

証明. $\mathrm{Div}\, \overline{T}$ を計算すると

$$(\mathrm{Div}\, \overline{T})(X) = g(U, X) U(\rho) + \rho g(U, X)\, \mathrm{Div}\, U + \rho g(X, \nabla_U U) \tag{6.5}$$

となる. $X \in \mathcal{X}(M)$ は任意であるから, 求める主張を得る. □

今度は, 時空 M の計量 g を未知とし, 流体 (ρ, U) は既知と仮定する．このとき, 計量 g および流体 (ρ, U) は運動の条件 (6.1) と次の等式を満たす.

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Sg = -\frac{8\pi G}{c^4}T \tag{6.6}$$

但し, G は万有引力定数である.

定義 6.4. 式 (6.6) を Einstein 方程式または重力場方程式という.

定理 6.5. 計量 g および流体 (ρ, U) が Einstein 方程式 (6.6) を満たすと仮定する．このとき, 流体 (ρ, U) は 4 元運動方程式 (6.4) を満たす.

証明. 反変 1 次共変 1 次テンソル場 $\Delta : \mathcal{A}^1(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を $(\alpha, X) \mapsto \alpha(X)$ で定める．このとき (6.6) は

$$\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{1}{2}S\Delta = -\frac{8\pi G}{c^4}\overline{T} \tag{6.7}$$

と同値になることに注意しよう．すると,

$$\mathrm{Div}\left\{\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{1}{2}S\Delta\right\} = \mathrm{Div}\,\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{1}{2}dS \tag{6.8}$$

なので, 定理 5.15 から, (6.8) の右辺は 0 である．ゆえに, (6.7) より (6.4) が成り立つ. □

命題 6.6. 時空 (M, g) に対し, 次は同値.

(i) $\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 0$.
(ii) $\mathrm{Ric} = 0$.

証明. まず, (i) を仮定して (ii) を示そう.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\alpha,X}\,\mathrm{Tr}_{\beta,Y}\,g^{-1}(\alpha,\beta)\left\{\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{1}{2}Sg(X,Y)\right\} &= \mathrm{Tr}_{\beta,Y}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}(\beta,Y) - \frac{1}{2}S\beta(Y)\right\} \\ &= S - \frac{1}{2}S \cdot 4 \\ &= -S.\end{aligned} \tag{6.9}$$

となるから, (i) ならば $S = 0$. ゆえに (ii) が成り立つ.

逆に, (ii) を仮定すれば, スカラー曲率の定義より明らかに $S = 0$. ゆえに, (i) が成り立つ. □

定義 6.7. 時空 (M, g) が命題 6.6 の条件を満たすとき, Ricci 平坦であるという．Ricci 平坦な時空は, 物質のない真空の時空を表す.

6.2 Schwarzschild 時空の導出

球対称かつ静的な時空とは時間座標 t と極座標 (r, θ, ϕ) を用いて次の形に書くことができるものをいう.

$$g = f_1(r)c^2dt^2 - f_2(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2). \tag{6.10}$$

但し, $f_1(r)$ と $f_2(r)$ は正の値をとる関数である．このような計量をもつ時空のうち Ricci 平坦なものを求めよう．ここで, $f_1(r)$ と $f_2(r)$ は仮定より, 関数 $\lambda(r)$ と $\mu(r)$ を用いて,

$$f_1(r) = e^{\lambda(r)} \tag{6.11}$$

$$f_2(r) = e^{\mu(r)} \tag{6.12}$$

の形に書けるとしてよい．このとき, 計量 g から Ricci テンソル場 Ric を計算すると

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ric})_{tt} &= c^2 \left\{ -\frac{1}{2}\lambda'' - \frac{1}{4}(\lambda')^2 + \frac{1}{4}\lambda'\mu' - \frac{\lambda'}{r} \right\} e^{\lambda-\mu} \\
(\mathrm{Ric})_{rr} &= \frac{1}{2}\lambda'' + \frac{1}{4}(\lambda')^2 - \frac{1}{4}\lambda'\mu' - \frac{\mu'}{r} \\
(\mathrm{Ric})_{\theta\theta} &= -1 + e^{-\mu}\left(1 - \frac{r}{2}\mu' + \frac{r}{2}\lambda'\right) \\
(\mathrm{Ric})_{\phi\phi} &= \sin^2\theta \left\{ -1 + e^{-\mu}\left(1 - \frac{r}{2}\mu' + \frac{r}{2}\lambda'\right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

となる．その他の成分はすべて 0 である．$(\mathrm{Ric})_{tt} = (\mathrm{Ric})_{rr} = 0$ より

$$\frac{\lambda' + \mu'}{r} = 0. \tag{6.14}$$

今, $r > 0$ としてよく, したがって, ある定数 b が存在して

$$\lambda = \mu + b \tag{6.15}$$

が成り立つ．さらに, $(\mathrm{Ric})_{\theta\theta} = (\mathrm{Ric})_{\phi\phi} = 0$ より

$$e^{-\mu}\left(1 - \frac{1}{2}r\mu' + \frac{1}{2}r\lambda'\right) = 1 \tag{6.16}$$

となる．(6.14) と (6.16) より

$$(re^{-\mu})' = 1 \tag{6.17}$$

となり, これを解くと, 定数 a を用いて

$$e^{-\mu} = 1 - \frac{a}{r} \tag{6.18}$$

と書ける．(6.15) より

$$e^{\lambda} = e^b\left(1 - \frac{a}{r}\right) \tag{6.19}$$

となる．ゆえに, 求める計量は

$$g = e^b\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{6.20}$$

となる．必要があれば, 座標変換

$$\tilde{t} = e^{b/2}t \tag{6.21}$$

を行えば

$$g = \left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2d\tilde{t}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{6.22}$$

を得る．これは, Schwarzschild 時空 (2.6) に他ならない．

6.3　Friedmann モデル

一様に物質が分布しているような時空を考え, その計量を求めよう. ここでは, 考える計量が Robertson-Walker 計量 (2.12) で表されると仮定し, そのスケール因子 $a(t)$ と空間の曲率 k を決定することにする.

まず, Robertson-Walker 計量から Einstein 方程式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ric})_{tt} - \frac{1}{2}Sg_{tt} &= -\frac{3}{a^2}\left\{kc^2 + (a')^2\right\}\\(\mathrm{Ric})_{rr} - \frac{1}{2}Sg_{rr} &= \frac{1}{c^2(1-kr^2)}\left\{2aa'' + kc^2 + (a')^2\right\}\\(\mathrm{Ric})_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Sg_{\theta\theta} &= \frac{r^2}{c^2}\left\{2aa'' + kc^2 + (a')^2\right\}\\(\mathrm{Ric})_{\phi\phi} - \frac{1}{2}Sg_{\phi\phi} &= \frac{r^2\sin^2\theta}{c^2}\left\{2aa'' + kc^2 + (a')^2\right\}\end{aligned} \tag{6.23}$$

となる. 但し, その他の成分はすべて 0 である.

次に, Einstein 方程式の右辺を考えよう. 一様に物質がつまっているから, 静止質量密度は時間変数 t の関数 $\rho(t)$ で書けるとしてよい. また, 物質の流れは特別な方向を持たないと仮定すれば, 流体の 4 元速度ベクトル場は $U = \partial/\partial t$ と書ける. このとき, エネルギー運動量テンソルは

$$T_{tt} = \rho(t)c^4 \tag{6.24}$$

となる. 但し, その他の成分はすべて 0 である.

Einstein 方程式の両辺 (6.23) および (6.24) を比較することにより,

$$-\frac{3}{a^2}\left\{kc^2 + (a')^2\right\} = -\frac{8\pi G}{c^4}\rho c^4, \tag{6.25}$$

$$2aa'' + kc^2 + (a')^2 = 0 \tag{6.26}$$

を得る.

定義 6.8. 式 (6.25) および (6.26) を Friedmann 方程式という.

Friedmann 方程式を解いて, スケール因子 $a(t)$ と曲率 k を求めよう. 現在の宇宙の年齢を $t = t_0$, 現在の物質の密度を ρ_0 とおく. このとき, $a(t_0) = 1$, $\rho_0 = \rho(t_0)$ に注意しよう.

補題 6.9.

$$a'(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a(t)} - kc^2 \tag{6.27}$$

が成り立つ.

証明. まず, (6.25) から

$$a\left\{(a')^2 + kc^2\right\} = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3 \tag{6.28}$$

が成り立つ. さらに (6.26) より左辺は 時間変数 t によらない定数となる. したがって, (6.27) が成り立つ. □

定義 6.10. (現在の) Hubble 定数を

$$H_0 := \frac{a'(t_0)}{a(t_0)} \tag{6.29}$$

で定める．また, 臨界密度 ρ_c を

$$\rho_c := \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{6.30}$$

で定める．

H_0 と ρ_0 を観測すれば, 空間の曲率 k が求められる．(6.27), (6.29), (6.30) より

$$k = \frac{8\pi G(\rho_0 - \rho_c)}{3c^2} \tag{6.31}$$

を得る．

スケール因子 $a(t)$ を求めるため, k の値によって場合分けを行い, 方程式 (6.27) を解いてみよう．

(i) まず $k > 0$ のとき, 即ち, $\rho_0 > \rho_c$ の場合を考える．このとき, 方程式 (6.27) の解 $a(t)$ は, パラメータ η を用いて

$$\begin{aligned} t &= \frac{4\pi G\rho_0}{3k^{3/2}c^3}(\eta - \sin\eta), \\ a &= \frac{4\pi G\rho_0}{3kc^2}(1 - \cos\eta) \end{aligned} \tag{6.32}$$

と書ける．宇宙は, 膨張から始まり, しだいに速度をゆるめ, いずれ膨張が完全に止まる．その後は収縮し, 最後は大きさが 0 につぶれていく．大きさが 0 につぶれるのは $t = 8\pi^2 G\rho_0/3k^{3/2}c^3$ のときであり, これが宇宙の寿命となる．

(ii) 次に $k = 0$ のとき, 即ち, $\rho_0 = \rho_c$ の場合を考察しよう．このとき, 方程式 (6.27) の解は

$$a(t) = \sqrt[3]{6\pi G\rho_c t^2} \tag{6.33}$$

となる．スケール因子は単調増加関数になるため, 永遠に膨張し続ける宇宙となる．この宇宙の寿命は無限で, 膨張速度は減速しながら 0 に近づく．現在の宇宙の年齢 t_0 は

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \tag{6.34}$$

となる．

(iii) 最後に $k < 0$ の場合, 即ち, $\rho_0 < \rho_c$ の場合を見よう．このときの (6.27) の解はパラメータ η を用いて

$$\begin{aligned} t &= \frac{4\pi G\rho_0}{3(-k)^{3/2}c^3}(\sinh\eta - \eta), \\ a &= \frac{4\pi G\rho_0}{3(-k)c^2}(\cosh\eta - 1) \end{aligned} \tag{6.35}$$

と書ける．したがって, この宇宙も永遠に膨張し, その寿命も無限である．特に, ρ_0 がほとんど 0 の場合, $k = -H_0^2/c^2$ である．$\rho_0 = 0$ とおいて, 方程式 (6.27) を解くと, 解 $a(t) = H_0 t$ を得る．したがって, ρ_0 がほとんど 0 と仮定したときの宇宙の年齢 t_0 は

$$t_0 = \frac{1}{H_0}$$

となる．

参考文献

[1] 細谷 暁夫, 時空の力学 一般相対論の物理, 岩波講座 物理の世界, 岩波書店, 2002.

[2] Yoonbai Kim, Chae Young Oh, and Namil Park, Classical Geometry of De Sitter Spacetime: An Introductory Review, J. Korean Phys. Soc. 42 (2003) 573, `arXiv:hep-th/0212326`.

[3] W. M. Oliva, Geometric Mechanics, Springer, 2002.

[4] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, 1983.

[5] B. O'Neill 著/井川 俊彦 訳, カー・ブラックホールの幾何学, 共立出版, 2002.

[6] M. Spivak, Comprehensive Introduction to Differential Geometry 5 Volumes (3rd Edition), Publish or Perish, 1999.

[7] 砂田 利一, 数学からみた古典力学, 岩波講座 物理の世界, 岩波書店, 2004.

[8] 和達 三樹, 微分・位相幾何, 理工系の基礎数学, 岩波書店, 1996.