電波工学ノート

Palais Blanc

目次

1　電磁波

この節では, 電磁波の基本方程式とその解である電磁波ポテンシャルについて解説する. はじめに, 電磁波を時間の関数として表すのではなく複素数値として表す方法を学ぶ. 次に, リーマン多様体上の電磁波の方程式について述べる. Maxwell 方程式が Lorentz 条件と Helmholtz 方程式に書き換わるのを知る. 最後に, Euchlid 空間内で Helmholtz 方程式を解き, 電磁波ポテンシャルを得る.

1.1　波の複素表示

ω を正の実数とする.

定義 1.1. 時間変数 t の実数値関数 $t \mapsto f(t)$ が角周波数 ω の波であるとは, ある実数 a, b が存在して

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{1.1}$$

の形に書けるときをいう. このとき, f の複素表示 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f} := a - jb \tag{1.2}$$

で定める. 但し, j は虚数単位 $-\sqrt{-1}$ である.

命題 1.2.
(i) 角周波数 ω の波 $f(t)$ を考えることと, 複素数 $\tilde{f}$ を考えることとは一対一対応する. 特に, f の複素表示 $\tilde{f}$ が与えられれば,

$$f(t) := \mathrm{Re}\left(\tilde{f}e^{j\omega t}\right) \tag{1.3}$$

とおくことにより, 波 f が再構成される.

(ii) また, f が角周波数 ω の波ならば, df/dt もまた角周波数 ω の波であり, その複素表示は $j\omega\tilde{f}$ である.

定義 1.3. 角周波数 ω の波 $t \mapsto f_1(t)$, $t \mapsto f_2(t)$ が与えられているとする. このとき, f_1 と f_2 の平均積 $\overline{f_1 f_2}$ を

$$\overline{f_1 f_2} := \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)f_2(t)\,dt \tag{1.4}$$

で定める. 但し, T は周期を表す, 即ち, $T = 2\pi/\omega$ である.

命題 1.4. f_1, f_2 を角周波数 ω の波, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ を各々の複素表示とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\overline{f_1 f_2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{f}_1\tilde{f}_2{}^*). \tag{1.5}$$

但し, $(\cdot)^*$ は複素共役を表す.

1.2　電磁波の基本方程式

(M, g) を 3 次元 Riemann 多様体, ω を正の実数とする.

M 内の電荷が角周波数 ω の波であるとき, その電荷密度は複素数値 3 次微分形式 ρ によって複素表示される. また, M 内を流れる電流も角周波数 ω の波であるとき, 電流密度は複素数値 2 次微分形式 i によって複素表示される. このとき, 電気量保存則は

$$j\omega\rho + di = 0 \tag{1.6}$$

と書くことができる.

例 1.5 (電気双極子と磁気双極子)**.** M 内の電気双極子および磁気双極子が, 角周波数 ω の波であるとき, 電気双極子は複素数値 2 次微分形式 p で, 磁気双極子は複素数値 1 次微分形式 m で複素表示できる. このとき, 電気双極子と磁気双極子から定まる電荷と電流も角周波数 ω の波であり, 複素表示された電荷密度と電流密度をそれぞれ ρ および i とすると,

$$\rho = -dp, \tag{1.7}$$
$$i = j\omega p + dm \tag{1.8}$$

なる関係がある. もちろん, これは電気量保存則 (1.6) を満たしている.

M 内に電気量保存則を満たす電荷および電流が与えられ, それらは角周波数 ω の波であるとする. このとき, 周囲に発生する電磁場のうち角周波数 ω の波であるようなものを求める問題を考えよう. また, このような電磁場を角周波数 ω の電磁波と呼ぶ.

電場, 磁場, 電束密度, 磁束密度を角周波数 ω の波として複素表示したものをそれぞれ E, H, D, B とおくことにすると, Maxwell 方程式は

$$dB = 0, \tag{1.9}$$
$$dE + j\omega B = 0, \tag{1.10}$$
$$dD = \rho, \tag{1.11}$$
$$dH - j\omega D = i \tag{1.12}$$

と書ける.

電磁場の振る舞いを調べるには, これら Maxwell 方程式に加えて, 媒質 M の性質を表す構成方程式が必要である. ここでは, 媒質は次の性質をもつと仮定する.

定義 1.6. (i) M が等方線形誘電体であるとは, M 上の実数値関数 ϵ が与えられ,

$$D = \epsilon *_g E \tag{1.13}$$

なる関係があるときをいう. ϵ を誘電率という.

(ii) M が等方線形磁性体であるとは, M 上の実数値関数 μ が与えられ,

$$*_g B = \mu H \tag{1.14}$$

なる関係があるときをいう. μ を透磁率という.

(iii) M 上の光の速度 c を

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{1.15}$$

で定める. また, M 上の波動インピーダンス η を

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{1.16}$$

で定める. c および η は定義により M 上の実数値関数である.

M が等方線形誘電体かつ等方線形磁性体であるとき, M 内部の電磁波は Maxwell 方程式 (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) および構成方程式 (1.13), (1.14) で記述される.

次に, 境界条件について述べよう. 媒質 M が 2 つの領域 M^+, M^- に別れ, その境界面を N とする. N を堺にして, M^+, M^- の誘電率と透磁率が不連続に変化したする. このとき M^+ 上の電場 E^+, 磁場 H^+, 電束密度 D^+, 磁束密度 B^+ と M^- 上の電場 E^-, 磁場 H^-, 電束密度 D^-, 磁束密度 B^- との間には次の関係がある.

$$\iota^* E^+ = \iota^* E^-, \tag{1.17}$$

$$\iota^* H^+ = \iota^* H^-, \tag{1.18}$$

$$\iota^* D^+ = \iota^* D^-, \tag{1.19}$$

$$\iota^* B^+ = \iota^* B^-. \tag{1.20}$$

但し, ι は N から M への埋め込み写像, ι^* は ι から誘導される引き戻し写像である.

Maxwell 方程式を解くため, スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを導入しよう. ここでは, 簡単のため M は均質と仮定しよう. すなわち, 誘電率 ϵ, 透磁率 μ, 光の速さ c, 波動インピーダンス η はすべて定数値であると仮定する. スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルも角周波数 ω の波ならば, それぞれ M 上の複素関数 ϕ および複素数値 1 次微分形式 A として複素表示され,

$$E = -d\phi - j\omega A, \tag{1.21}$$

$$B = dA \tag{1.22}$$

を満たす. また, Lorentz 条件は

$$\frac{j\omega}{c^2}\phi + d_g^* A = 0 \tag{1.23}$$

と書ける. さらに, 波動方程式は

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle_g\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon} *_g \rho, \tag{1.24}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle_g\right)A = -\mu *_g i \tag{1.25}$$

と書ける.

定義 1.7. 方程式 (1.24), (1.25) を Helmholtz 方程式という.

角周波数 ω の電磁波は, Lorentz 条件 (1.23), Helmholtz 方程式 (1.24), (1.25) で記述される.

定義 1.8. Poynting ベクトル S を

$$S = \overline{E \wedge H} \tag{1.26}$$

で定める. E と H は複素表示されているから, ウェッジは平均積の意味で行うことに注意.

1.3 電磁波ポテンシャル

M が 3 次元 Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ の場合に, Lorentz 条件 (1.23) および Helmholtz 方程式 (1.24), (1.25) を解いてみよう. $x = (x^1, x^2, x^3)$ を Euchlid 直交座標とする. ρ および i を

$$\rho = \rho_0(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{1.27}$$
$$i = i_1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + i_2(x)\, dx^3 \wedge dx^1 + i_3(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \tag{1.28}$$

と表示しておくと, 電気量保存則 (1.6) は

$$j\omega\rho_0 + \frac{\partial i_1}{\partial x^1} + \frac{\partial i_2}{\partial x^2} + \frac{\partial i_3}{\partial x^3} = 0 \tag{1.29}$$

と書ける. A を

$$A = A_1(x)\, dx^1 + A_2(x)\, dx^2 + A_3(x)\, dx^3 \tag{1.30}$$

と表示しておくと, Lorentz 条件 (1.23) は

$$\frac{j\omega}{c^2}\phi + \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0 \tag{1.31}$$

と同値で, Helmholtz 方程式 (1.24), (1.25) は

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}\phi(x) &= -\frac{\rho_0(x)}{\epsilon}, \\
\left\{\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_1(x) &= -\mu i_1(x), \\
\left\{\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_2(x) &= -\mu i_2(x), \\
\left\{\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_3(x) &= -\mu i_3(x)
\end{aligned} \tag{1.32}$$

と書ける.

方程式 (1.32) の解は, 電磁気学ノートの遅延ポテンシャルを利用すれば

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right)\rho_0(y)\, dy, \\
A_1(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right) i_1(y)\, dy, \\
A_2(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right) i_2(y)\, dy, \\
A_3(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right) i_3(y)\, dy
\end{aligned} \tag{1.33}$$

となる. これらが Lorentz 条件 (1.31) を満たすことを確かめればよい. (1.31) の左辺に (1.33) を代入して計

算すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{j\omega}{c^2}\phi + \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{j\omega}{c^2\epsilon}\rho_0(y) + \mu i_1(y)\frac{\partial}{\partial x^1} + \mu i_2(y)\frac{\partial}{\partial x^2} + \mu i_3(y)\frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right)\,dy \\
=&\frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ j\omega\rho_0(y) - i_1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} - i_2(y)\frac{\partial}{\partial y^2} - i_3(y)\frac{\partial}{\partial y^3} \right\} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right)\,dy \\
=&\frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x-y|\right) \left\{ j\omega\rho_0(y) + \frac{\partial i_1(y)}{\partial y^1} + \frac{\partial i_2(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial i_3(y)}{\partial y^3} \right\}\,dy \\
=&0
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

となる. 但し, 最後の等式では, 電気量保存則 (1.29) を用いた.

定義 1.9. 解 (1.33) を電磁波ポテンシャルという.

例 1.10 (振動する電気双極子)**.** 次の式で定義される周波数 ω の電気双極子 p を考える.

$$p = \delta(x)(p_1\,dx^2 \wedge dx^3 + p_2\,dx^3 \wedge dx^1 + p_3\,dx^1 \wedge dx^2). \tag{1.35}$$

但し, p_1, p_2, p_3 は複素定数とする. すると, 電荷密度と電流密度は

$$
\begin{aligned}
\rho_0(x) &= -\left(p_1\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^1} + p_2\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^2} + p_3\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^3}\right), \\
i_1(x) &= j\omega p_1\delta(x), \\
i_2(x) &= j\omega p_2\delta(x), \\
i_3(x) &= j\omega p_3\delta(x)
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

となる. したがって, 電磁波ポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3}{4\pi\epsilon}\left\{ j\frac{\omega}{c}\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^3} \right\}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right), \\
A_1(x) &= \frac{j\omega p_1\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right), \\
A_2(x) &= \frac{j\omega p_2\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right), \\
A_3(x) &= \frac{j\omega p_3\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right)
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

となる.

例 1.11 (振動する磁気双極子)**.** 次の式で定義される周波数 ω の磁気双極子 m を考える.

$$m = \delta(x)(m_1\,dx^1 + m_2\,dx^2 + m_3\,dx^3). \tag{1.38}$$

但し, m_1, m_2, m_3 は複素定数とする. このとき, 電荷密度と電流密度はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\rho_0 &= 0, \\
i_1 &= m_3\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^2} - m_2\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^3}, \\
i_2 &= m_1\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^3} - m_3\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^1}, \\
i_3 &= m_2\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^1} - m_1\frac{\partial\delta(x)}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

と書ける．このとき, 電磁波ポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= 0, \\
A_1(x) &= \frac{\mu}{4\pi}(m_2 x^3 - m_3 x^2)\left(j\frac{\omega}{c}\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^3}\right)\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right), \\
A_2(x) &= \frac{\mu}{4\pi}(m_3 x^1 - m_1 x^3)\left(j\frac{\omega}{c}\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^3}\right)\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right), \\
A_3(x) &= \frac{\mu}{4\pi}(m_1 x^2 - m_2 x^1)\left(j\frac{\omega}{c}\frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^3}\right)\exp\left(-j\frac{\omega}{c}|x|\right)
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

となる．

2　電磁波の放射

この節では, 電磁波がどのように Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ を伝わるのかを考える. 最初は, 電流源から十分遠く離れた平面波に近似できる場合について調べる. 次に, 遠方解とよばれるアンテナから送信された電波として近似できる場合について考察する. 最後に, 具体的な線状アンテナやループアンテナの放射する電波について調べる.

2.1　平面波解

空間 $\mathbb{R}^3$ の原点から十分遠く離れた有界領域に電荷電流源があるとする. このとき, そこから放射される電磁波が原点近くでどのように観測されるかを見てみよう. 今, ξ を単位ベクトル, 即ち, $|\xi| = 1$ とし, R は正の実数であるとする. そして, 電流源は中心 $-R\xi$, 半径 R_0 の有界領域にあると仮定する. このとき, (1.33) により電磁ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{|y+R\xi|<R_0} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-jk|x-y|\right)\rho_0(y)\,dy, \\
A_1(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{|y+R\xi|<R_0} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-jk|x-y|\right)i_1(y)\,dy, \\
A_2(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{|y+R\xi|<R_0} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-jk|x-y|\right)i_2(y)\,dy, \\
A_3(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{|y+R\xi|<R_0} \frac{1}{|x-y|}\exp\left(-jk|x-y|\right)i_3(y)\,dy
\end{aligned} \tag{2.1}$$

と表される. 但し $k := \omega/c$ である. ここで, 級数展開

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x-y|} &= \frac{1}{|R\xi + (x-y-R\xi)|} \\
&= \frac{1}{R|\xi|} - \left(\frac{\xi\cdot(x-y-R\xi)}{|\xi||x-y-R\xi|}\right)\frac{|x-y-R\xi|}{R^2|\xi|^2} \\
&\quad + \left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\xi\cdot(x-y-R\xi)}{|\xi||x-y-R\xi|}\right)^2 - \frac{1}{2}\right\}\frac{|x-y-R\xi|^2}{R^3|\xi|^3} + \cdots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

を考え,

$$R \gg R_0, \qquad\qquad R \gg |x| \tag{2.3}$$

を仮定すると, 展開式の第 1 項を残し, 第 2 項以降を無視することができる. 即ち, 近似式

$$\frac{1}{|x-y|} \sim \frac{1}{R} \tag{2.4}$$

が成り立つ. 同様に, 級数展開

$$\begin{aligned}
k|x-y| &= k|R\xi + (x-y-R\xi)| \\
&= kR|\xi| + \left(\frac{\xi\cdot(x-y-R\xi)}{|\xi||x-y-R\xi|}\right)k|x-y-R\xi| \\
&\quad + \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi\cdot(x-y-R\xi)}{|\xi||x-y-R\xi|}\right)^2\right\}\frac{k|x-y-R\xi|^2}{R|\xi|} + \cdots
\end{aligned} \tag{2.5}$$

を用いて,

$$R \gg kR_0^2, \qquad\qquad R \gg k|x|^2 \tag{2.6}$$

を仮定すると, 展開式の第 1 項と第 2 項のみが残り, 第 3 項以降を無視することができる. 即ち, 近似式

$$k|x-y| \sim k\xi \cdot (x-y) \tag{2.7}$$

が得られる.

したがって, (2.3), (2.6) の下, (2.1) は

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{R}\exp\left(-jk\xi\cdot x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)\rho_0(y)\,dy,\\
A_1(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{R}\exp\left(-jk\xi\cdot x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)i_1(y)\,dy,\\
A_2(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{R}\exp\left(-jk\xi\cdot x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)i_2(y)\,dy,\\
A_3(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{R}\exp\left(-jk\xi\cdot x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)i_3(y)\,dy
\end{aligned} \tag{2.8}$$

と近似できる.

定義 2.1. (2.8) を平面波解という.

(2.8) は電気量保存則 (1.6) の下で, Lorentz 条件 (1.31) および電荷電流源を持たない Helmholtz 方程式

$$\begin{aligned}
\left\{k^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}\phi(x) &= 0,\\
\left\{k^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_1(x) &= 0,\\
\left\{k^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_2(x) &= 0,\\
\left\{k^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_3(x) &= 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

を満たしていることに注意しよう.

平面波を詳しく調べるため,

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)i_1(y)\,dy,\\
C_2 &:= \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)i_2(y)\,dy,\\
C_3 &:= \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\xi\cdot y\right)i_3(y)\,dy
\end{aligned} \tag{2.10}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{\eta}{4\pi}(C\cdot\xi)\exp\left(-jk\xi\cdot x\right),\\
A_1(x) &= \frac{\mu}{4\pi}C_1\exp\left(-jk\xi\cdot x\right),\\
A_2(x) &= \frac{\mu}{4\pi}C_2\exp\left(-jk\xi\cdot x\right),\\
A_3(x) &= \frac{\mu}{4\pi}C_3\exp\left(-jk\xi\cdot x\right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

と書ける. 但し, $C := (C_1, C_2, C_3)$ である. 電場は

$$E = E_1(x)\,dx^1 + E_2(x)\,dx^2 + E_3(x)\,dx^3 \tag{2.12}$$

と表示しておくと

$$\begin{aligned} E_1(x) &= -\frac{\eta}{4\pi} jk\{C_1 - (C\cdot\xi)\xi_1\}\exp(-jk\xi\cdot x), \\ E_2(x) &= -\frac{\eta}{4\pi} jk\{C_2 - (C\cdot\xi)\xi_2\}\exp(-jk\xi\cdot x), \\ E_3(x) &= -\frac{\eta}{4\pi} jk\{C_3 - (C\cdot\xi)\xi_3\}\exp(-jk\xi\cdot x) \end{aligned} \tag{2.13}$$

となり, 磁場は

$$H = H_1(x)\,dx^1 + H_2(x)\,dx^2 + H_3(x)\,dx^3 \tag{2.14}$$

と表示しておくと

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{1}{4\pi} jk(C_2\xi_3 - C_3\xi_2)\exp(-jk\xi\cdot x), \\ H_2(x) &= \frac{1}{4\pi} jk(C_3\xi_1 - C_1\xi_3)\exp(-jk\xi\cdot x), \\ H_3(x) &= \frac{1}{4\pi} jk(C_1\xi_2 - C_2\xi_1)\exp(-jk\xi\cdot x) \end{aligned} \tag{2.15}$$

となる. 以上から,

$$\begin{aligned} |E|^2 &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{E_1(x)E_1(x)^* + E_2(x)E_2(x)^* + E_3(x)E_3(x)^*\} \\ &= \frac{\eta^2}{32\pi} k^2 (C\times\xi)\cdot(C^*\times\xi), \\ |H|^2 &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{H_1(x)H_1(x)^* + H_2(x)H_2(x)^* + H_3(x)H_3(x)^*\} \\ &= \frac{1}{32\pi} k^2 (C\times\xi)\cdot(C^*\times\xi), \\ \langle E, H\rangle &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{E_1(x)H_1(x)^* + E_2(x)H_2(x)^* + E_3H_3(x)^*\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

を得る. つまり電場 E と磁場 H は直交し, さらに $|E| = \eta|H|$ が成り立つ. また, Poynting ベクトル S を

$$S = S_1(x)\,dx^2\wedge dx^3 + S_2(x)\,dx^3\wedge dx^1 + S_3(x)\,dx^1\wedge dx^2 \tag{2.17}$$

と表示しておくと

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{E_2(x)H_3(x)^* - E_3(x)H_2(x)^*\} \\ &= \frac{\eta}{32\pi} k^2 \xi_1 (C\times\xi)\cdot(C^*\times\xi), \\ S_2(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{E_3(x)H_1(x)^* - E_1(x)H_3(x)^*\} \\ &= \frac{\eta}{32\pi} k^2 \xi_2 (C\times\xi)\cdot(C^*\times\xi), \\ S_3(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{E_1(x)H_2(x)^* - E_2(x)H_1(x)^*\} \\ &= \frac{\eta}{32\pi} k^2 \xi_3 (C\times\xi)\cdot(C^*\times\xi) \end{aligned} \tag{2.18}$$

となる.

例 2.2 (偏光)**.** 進行する電磁波の電場 E の向きについて, 調べてみよう. 電磁場の進行方向を x^3 軸の正の向きにとる. すなわち, $\xi = (0,0,1)$ と仮定する. すると (2.13) は

$$\begin{aligned} E_1(x) &= -\frac{\eta}{4\pi} jkC_1 \exp(-jkx^3), \\ E_2(x) &= -\frac{\eta}{4\pi} jkC_2 \exp(-jkx^3), \\ E_3(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる. ここで, 指数関数に掛けられている定数部分を極形式

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{4\pi} jkC_1 &= r_1 \exp(j\theta_1), \\ -\frac{\eta}{4\pi} jkC_2 &= r_2 \exp(j\theta_2) \end{aligned} \tag{2.20}$$

で表すと, 電場 E は

$$\begin{aligned} E_1(x) &= r_1 \exp(j(-kx^3 + \theta_1)), \\ E_2(x) &= r_2 \exp(j(-kx^3 + \theta_2)) \\ E_3(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

と書きなおすことができる. さらに複素表示から角周波数 ω の波の式で表すと

$$\begin{aligned} E_1(t,x) &= r_1 \cos(\omega t - kx^3 + \theta_1), \\ E_2(t,x) &= r_2 \cos(\omega t - kx^3 + \theta_2), \\ E_3(t,x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

となる. t と x^3 をパラメータとして (E_1, E_2) の軌跡を計算すると

$$\left(\frac{E_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{r_2}\right)^2 - 2\frac{E_1}{r_1}\frac{E_2}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2) = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \tag{2.23}$$

となる.

(i) $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$ のとき, 平面波は直線偏光であるという.
(ii) $r_1 = r_2$ かつ $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$ のとき, 平面波は円偏光であるという.
(iii) それ以外の場合, 平面波は楕円偏光であるという.

2.2 遠方解

自由空間 $\mathbb{R}^3$ におけるアンテナからの電磁波の放射について考えよう. 今, 電流源 i が原点を中心とする半径 R_0 内の領域に含まれると仮定する. このとき, 電流源から放射される電磁波は, 電磁波ポテンシャル (1.33) により表されるが, $|x|$ が R_0 に比べて十分大きいときは, 次のような近似を用いることによって, 式 (1.33) を簡単にすることができる. まず, 級数展開

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} + \left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right)\frac{|y|}{|x|^2} + \left\{\frac{3}{2}\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right)^2 - \frac{1}{2}\right\}\frac{|y|^2}{|x|^3} + \cdots \tag{2.24}$$

を考えると, $|y| < R_0$ であるから

$$|x| \gg R_0 \tag{2.25}$$

の場合には, 近似式

$$\frac{1}{|x-y|} \sim \frac{1}{|x|} \tag{2.26}$$

が使える. また, 級数展開

$$k|x-y| = k|x| - \left(\frac{x \cdot y}{|x||y|}\right) k|y| + \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x \cdot y}{|x||y|}\right)^2\right\} \frac{k|y|^2}{|x|} + \cdots \tag{2.27}$$

を考えると,

$$|x| \gg kR_0^2 \tag{2.28}$$

の場合には, 近似式

$$k|x-y| \sim k|x| - k\frac{x \cdot y}{|x|} \tag{2.29}$$

が成り立つ.

したがって, 条件 (2.25), (2.28) の下で, 式 (1.33) は

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{|x|}\exp\left(-jk|x|\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right)\rho_0(y)\,dy, \\
A_1(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-jk|x|\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right)i_1(y)\,dy, \\
A_2(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-jk|x|\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right)i_2(y)\,dy, \\
A_3(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-jk|x|\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right)i_3(y)\,dy
\end{aligned} \tag{2.30}$$

と近似できる.

定義 2.3. (2.30) を遠方解または Fraunhofer 解という.

遠方解を詳しく調べ, 電磁波がどのように放射されるのかを見てみよう. まず, 電気量保存則

$$\rho_0(y) = \frac{j}{\omega}\left(\frac{\partial i_1(y)}{\partial y^1} + \frac{\partial i_2(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial i_3(y)}{\partial y^3}\right) \tag{2.31}$$

を用いると, スカラーポテンシャル ϕ は

$$\phi(x) = \frac{\eta}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp\left(-jk|x|\right)\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right)\left\{\frac{x^1}{|x|}i_1(y) + \frac{x^2}{|x|}i_2(y) + \frac{x^3}{|x|}i_3(y)\right\}dy \tag{2.32}$$

と書ける.

ここで,

$$Q(x) := \int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right)\left\{\frac{x^1}{|x|}i_1(y) + \frac{x^2}{|x|}i_2(y) + \frac{x^3}{|x|}i_3(y)\right\}dy, \tag{2.33}$$

とおくと,

$$\phi = \frac{\eta}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp(-jk|x|)Q \tag{2.34}$$

と書ける．また，

$$
\begin{aligned}
F &:= F_1(x)\,dx^1 + F_2(x)\,dx^2 + F_3(x)\,dx^3, \\
F_1(x) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(jk\frac{x\cdot y}{|x|}\right) i_1(y)\,dy, \\
F_2(x) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(jk\frac{x\cdot y}{|x|}\right) i_2(y)\,dy, \\
F_3(x) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(jk\frac{x\cdot y}{|x|}\right) i_3(y)\,dy
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

とおくと，

$$
A = \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x|}\exp(jk|x|)F \tag{2.36}
$$

と書ける．

定義 2.4. F を放射ベクトル (radiation vector) という．

これらを次の座標変換式

$$
\begin{aligned}
x^1 &= r\cos\theta, \\
x^2 &= r\sin\theta\cos\varphi, \\
x^3 &= r\sin\theta\sin\varphi
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

で定義される極座標 (r,θ,φ) を用いて書き直そう．Q は θ と φ のみの関数である．放射ベクトル F については，

$$
F = F_r\,dr + r\Lambda \tag{2.38}
$$

と書ける．但し，

$$
\begin{aligned}
F_r(\theta,\varphi) &= F_1\cos\theta + F_2\sin\theta\cos\varphi + F_3\sin\theta\sin\varphi \\
&= Q(\theta,\varphi)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

であり，Λ は θ と φ のみの 1 次微分形式で，

$$
\begin{aligned}
\Lambda &:= \Lambda_\theta\,d\theta + \Lambda_\varphi\,d\varphi, \\
\Lambda_\theta(\theta,\varphi) &:= -F_1\sin\theta + F_2\cos\theta\cos\varphi + F_3\cos\theta\sin\varphi, \\
\Lambda_\varphi(\theta,\varphi) &:= -F_2\sin\theta\sin\varphi + F_3\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

と定義されるものである．つまり，A を

$$
A = A_r\,dr + A_\theta\,d\theta + A_\varphi\,d\varphi \tag{2.41}
$$

と表示しておくと，

$$
\begin{aligned}
A_r &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{r}\exp(-jkr)Q, \\
A_\theta &= \frac{\mu}{4\pi}\exp(-jkr)\Lambda_\theta, \\
A_\varphi &= \frac{\mu}{4\pi}\exp(-jkr)\Lambda_\varphi
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

となる．

電場 E を

$$E = E_r\,dr + E_\theta\,d\theta + E_\varphi\,d\varphi \tag{2.43}$$

と表示しておくと,

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} - j\omega A_r \\
&= \frac{\eta}{4\pi}\exp(-jkr)\frac{1}{r^2}Q, \\
E_\theta &= -\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - j\omega A_\theta \\
&= -\frac{\eta}{4\pi}\exp(-jkr)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta} + jk\Lambda_\theta\right\}, \\
E_\varphi &= -\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - j\omega A_\varphi \\
&= -\frac{\eta}{4\pi}\exp(-jkr)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi} + jk\Lambda_\varphi\right\}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる. 電場の大きさを $|E|$ とおくと,

$$\begin{aligned}
|E|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E_r E_r^* + \frac{1}{r^2}E_\theta E_\theta^* + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}E_\varphi E_\varphi^*\right) \\
&\sim \frac{\eta^2}{32\pi^2}\frac{k^2}{r^2}\left(\Lambda_\theta\Lambda_\theta^* + \frac{1}{\sin^2\theta}\Lambda_\varphi\Lambda_\varphi^*\right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

となる. 但し, $r\to\infty$ のとき, $1/r^2$ より速く 0 に収束する項は除いた.

磁束密度 B を

$$B = B_r\,d\theta\wedge d\varphi + dr\wedge(B_\theta\,d\theta + B_\varphi\,d\varphi) \tag{2.46}$$

と表示しておけば,

$$\begin{aligned}
B_r &= \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\exp(-jkr)\left\{\frac{\partial\Lambda_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Lambda_\theta}{\partial\varphi}\right\}, \\
B_\theta &= \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \\
&= -\frac{\mu}{4\pi}\exp(-jkr)\left\{jk\Lambda_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right\}, \\
B_\varphi &= \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} \\
&= -\frac{\mu}{4\pi}\exp(-jkr)\left\{jk\Lambda_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right\}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

を得る.

磁場 H を

$$H = H_r\,dr + H_\theta\,d\theta + H_\varphi\,d\varphi \tag{2.48}$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
H_r &= \frac{1}{\mu} B_r \frac{1}{r^2 \sin\theta} \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \exp(-jkr) \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \frac{\partial \Lambda_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Lambda_\theta}{\partial \varphi} \right\}, \\
H_\theta &= -\frac{1}{\mu} B_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{4\pi} \exp(-jkr) \frac{1}{\sin\theta} \left\{ jk\Lambda_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right\}, \\
H_\varphi &= \frac{1}{\mu} B_\theta \sin\theta \\
&= -\frac{1}{4\pi} \exp(-jkr) \sin\theta \left\{ jk\Lambda_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right\}
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

となる. 磁場の大きさを $|H|$ とすると

$$
\begin{aligned}
|H|^2 &= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(H_r H_r^* + \frac{1}{r^2} H_\theta H_\theta^* + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} H_\varphi H_\varphi^* \right) \\
&\sim \frac{1}{32\pi^2} \frac{k^2}{r^2} \left(\Lambda_\theta \Lambda_\theta^* + \frac{1}{\sin^2\theta} \Lambda_\varphi \Lambda_\varphi^* \right)
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

となる. 即ち, $|E| = \eta |H|$ が成り立つ. また, E と H の内積を計算すると

$$
\begin{aligned}
\langle E, H \rangle &= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(E_r H_r^* + \frac{1}{r^2} E_\theta H_\theta^* + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} E_\varphi H_\varphi^* \right) \\
&\sim 0
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

となるから, E と H は直交していることがわかる.

Poynting ベクトル S を

$$
S = S_r \, d\theta \wedge d\varphi + dr \wedge (S_\theta \, d\theta + S_\varphi \, d\varphi) \tag{2.52}
$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
S_r &= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^* \right) \\
&\sim \frac{\eta k^2}{32\pi^2} \left(\Lambda_\theta \Lambda_\theta^* + \frac{1}{\sin^2\theta} \Lambda_\varphi \Lambda_\varphi^* \right) \sin\theta, \\
S_\theta &= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^* \right) \\
&\sim 0, \\
S_\varphi &= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(E_r H_\varphi^* - E_\varphi H_r^* \right) \\
&\sim 0
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

となる. 但し, $r \to \infty$ のとき 0 に収束する項は省いた. したがって, 放射電力は

$$
\begin{aligned}
\lim_{R \to \infty} \int_{\{r=R\}} S &= \lim_{R \to \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \ \left. S_r \right|_{r=R} \\
&= \frac{\eta k^2}{32\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\Lambda_\theta \Lambda_\theta^* + \frac{1}{\sin^2\theta} \Lambda_\varphi \Lambda_\varphi^* \right) \sin\theta
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

で計算できる. 但し, 半径 R の球面 $\{r = R\}$ の向きは (θ, φ) が正の向きになるように選んでいる.

2.3 線状アンテナ

$\mathbb{R}^3$ の直交座標 (x^1, x^2, x^3) の x^1 軸上に配置されている線状アンテナが放射する電磁波を見てみよう．線状アンテナを表す電流源は, 複素関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を用いて次の形で書くことができる．

$$i = f(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)\, dx^2 \wedge dx^3. \tag{2.55}$$

(2.35) を用いて放射ベクトルを計算すると

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(jk\frac{x \cdot y}{|x|}\right) f(y^1)\delta(y^2)\delta(y^3)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jk\frac{x^1 s}{|x|}\right) f(s)\, ds, \\ F_2(x) &= 0, \\ F_3(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

となる．極座標に書き直すと (2.39), (2.40) より

$$\begin{aligned} F_r &= \cos\theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jks\cos\theta\right) f(s)\, ds, \\ \Lambda_\theta &= \sin\theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jks\cos\theta\right) f(s)\, ds, \\ \Lambda_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

となる．

例 2.5 (微小線状アンテナ)**.** 長さ a の微小線状アンテナのモデルは

$$f(s) := i_0 a \delta(s) \tag{2.58}$$

で表される．ここで i_0 はアンテナに流れる電流の大きさである．このとき, 放射ベクトルは (2.57) より

$$\begin{aligned} F_r &= i_0 a \cos\theta, \\ \Lambda_\theta &= i_0 a \sin\theta, \\ \Lambda_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

となるから, Poynting ベクトルは

$$S_r = \frac{\eta k^2}{32\pi^2}(i_0 a)^2 \sin^3\theta \tag{2.60}$$

となる．放射電力は

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \left. P_r\right|_{r=R} = \frac{\eta k^2 i_0^2 a^2}{12\pi}. \tag{2.61}$$

例 2.6 (半波長アンテナ)**.** i_0 を正の定数とし,

$$f(s) := i_0 \cos(ks), \qquad -\frac{\pi}{2k} < s < \frac{\pi}{2k} \tag{2.62}$$

とおく．これは半波長アンテナのモデルとなる．このとき, 放射ベクトルは (2.57) より

$$
\begin{aligned}
F_r &= \frac{2i_0}{k}\frac{\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, \\
\Lambda_\theta &= \frac{2i_0}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}, \\
\Lambda_\varphi &= 0
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

となるから, Poynting ベクトルは

$$
S_r = \frac{\eta i_0^2}{8\pi^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}
\tag{2.64}
$$

であり, 放射電力は

$$
\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\ S_r\big|_{r=R} = \frac{\eta i_0^2}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,d\theta
\tag{2.65}
$$

となる．最後の積分の近似値を参考に挙げておくと

$$
\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,d\theta = 1.2188\ldots
\tag{2.66}
$$

である．

2.4　ループアンテナ

円形ループアンテナが作る電磁波について考えよう．(x^2, x^3) 平面上に原点を中心とする半径 a の円周上に, 大きさ i_0 の電流が一様に流れると仮定する．このとき, 電流密度は

$$
\begin{aligned}
i_1(x) &= 0, \\
i_2(x) &= i_0\int_0^{2\pi}\delta(x^2 - a\cos s)\delta(x^3 - a\sin s)(-a\sin s)\,ds, \\
i_3(x) &= i_0\int_0^{2\pi}\delta(x^2 - a\cos s)\delta(x^3 - a\sin s)(a\cos s)\,ds
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

と書ける．(2.35) より放射ベクトルは

$$
\begin{aligned}
F_r &= 0, \\
\Lambda_\theta &= 0, \\
\Lambda_\varphi &= i_0 a\sin\theta\int_0^{2\pi}\exp(jka\sin\theta\cos(\varphi - s))\cos(\varphi - s)\,ds \\
&= 2\pi j i_0 a\sin\theta J_1(ka\sin\theta)
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

となる．但し, 最後の式の変形で Hanse の公式

$$
2\pi j J_1(z) = \int_0^{2\pi}\exp(jz\cos\theta)\cos\theta\,d\theta
\tag{2.69}
$$

を用いた.

したがって, Poynting ベクトルは

$$S_r = \frac{\eta k^2 i_0^2 a^2}{16} J_1(ka \sin\theta)^2 \sin\theta \tag{2.70}$$

であり, 放射電力は

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \ \ S_r|_{r=R} = \frac{\pi \eta k^2 i_0^2 a^2}{8} \int_0^{\pi} J_1(ka \sin\theta)^2 \sin\theta \, d\theta. \tag{2.71}$$

3　電磁波の伝送

この節では, 伝送線や導波管を通る電磁波について考える. 始めは, 2 次元 Riemann 多様体 M と $\mathbb{R}$ の直積 $M \times \mathbb{R}$ を通る電磁波の基礎方程式について述べる. 次に, 伝送線を通る電磁波を考える. この問題は, Laplace 方程式の境界値問題に帰着する. 最後に, 導波管を通る電磁波を考える. この問題は Laplace 作用素の固有値問題に帰着する.

3.1　伝送波の基本方程式

(M, g) を向きづけられた 2 次元 Riemann 多様体とし, $\mathbb{R}$ と直積をとることによって 3 次元 Riemann 多様体 $M \times \mathbb{R}$ が得られる. ここでは, $M \times \mathbb{R}$ 内の電磁波の振舞いについて調べよう. M の正の局所座標を (x^1, x^2), $\mathbb{R}$ の標準座標 を z とすれば, (x^1, x^2, z) は $M \times \mathbb{R}$ の局所座標となる. Riemann 計量は $g + dz^2$ である. $M \times \mathbb{R}$ の向きは (x^1, x^2, z) が正の局所座標となるように入れる.

定義 3.1. $M \times \mathbb{R}$ 内の電磁波が, 角周波数 ω, 伝播定数 β の伝送波であるとは, 電場 E, 磁場 H, 電束密度 D, 磁束密度 B が

$$\begin{aligned} E &= e^{-j\beta z}\left(E_1(x^1,x^2)\,dx^1 + E_2(x^1,x^2)\,dx^2 + E_z(x^1,x^2)\,dz\right), \\ H &= e^{-j\beta z}\left(H_1(x^1,x^2)\,dx^1 + H_2(x^1,x^2)\,dx^2 + H_z(x^1,x^2)\,dz\right), \\ D &= e^{-j\beta z}\left(D_z(x^1,x^2)\,dx^1\wedge dx^2 + D_1(x^1,x^2)\,dx^1\wedge dz + D_2(x^1,x^2)\,dx^2\wedge dz\right), \\ B &= e^{-j\beta z}\left(B_z(x^1,x^2)\,dx^1\wedge dx^2 + B_1(x^1,x^2)\,dx^1\wedge dz + B_2(x^1,x^2)\,dx^2\wedge dz\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

の形に表示されるものをいう.

もう少し見やすい形にまとめるため,

$$\begin{aligned} E' &:= E_1(x^1,x^2)\,dx^1 + E_2(x^1,x^2)\,dx^2, \\ H' &:= H_1(x^1,x^2)\,dx^1 + H_2(x^1,x^2)\,dx^2, \\ D' &:= D_1(x^1,x^2)\,dx^1 + D_2(x^1,x^2)\,dx^2, \\ D'' &:= D_z(x^1,x^2)\,dx^1\wedge dx^2, \\ B' &:= B_1(x^1,x^2)\,dx^1 + B_2(x^1,x^2)\,dx^2, \\ B'' &:= B_z(x^1,x^2)\,dx^1\wedge dx^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

と置くと,

$$\begin{aligned} E &= e^{-j\beta z}(E' + E_z(x^1,x^2)\,dz), \\ H &= e^{-j\beta z}(H' + H_z(x^1,x^2)\,dz), \\ D &= e^{-j\beta z}(D'' + D'\wedge dz), \\ B &= e^{-j\beta z}(B'' + B'\wedge dz) \end{aligned} \tag{3.3}$$

と書くことができる. これは, 各波を z 軸に平行な成分と垂直な成分に分解したものと考えられる. 例えば, 電場 E において, $e^{-j\beta z}E'$ は z 軸に平行な成分, $e^{-j\beta z}E_z$ は z 軸に垂直な成分である.

この分解表示を利用して, 伝送波の満たす方程式を導こう. まず, (1.9) は

$$dB' - j\beta B'' = 0 \tag{3.4}$$

と同値である. 但し, d は M 上の外微分作用素である. 同様にして, (1.10) は

$$dE_z + j\beta E' + j\omega B' = 0, \tag{3.5}$$
$$dE' + j\omega B'' = 0 \tag{3.6}$$

と同値である. $M \times \mathbb{R}$ 内に電荷電流源はないものとすると, 方程式 (1.11) は

$$dD' - j\beta D'' = 0 \tag{3.7}$$

と同値で, (1.12) は

$$dH_z + j\beta H' - j\omega D' = 0, \tag{3.8}$$
$$dH' - j\omega D'' = 0 \tag{3.9}$$

と同値である.

構成方程式 (1.13) は

$$\epsilon *_g E' = D', \tag{3.10}$$
$$\epsilon *_g E_z = D'' \tag{3.11}$$

と同値で, (1.14) は

$$- *_g B' = \mu H', \tag{3.12}$$
$$*_g B'' = \mu H_z \tag{3.13}$$

と同値である. 但し, $*_g$ は M 上の計量 g から誘導される Hodge の星作用素で, 局所座標で表示すると

$$\begin{aligned} *_g(E_1\,dx^1 + E_2\,dx^2) &= -(E_1 g^{21} + E_2 g^{22})\sqrt{\det g}\,dx^1 + (E_1 g^{11} + E_2 g^{12})\sqrt{\det g}\,dx^2, \\ &= (E_1 g_{12} - E_2 g_{11})\sqrt{\det g^{-1}}\,dx^1 + (E_1 g_{22} - E_2 g_{21})\sqrt{\det g^{-1}}\,dx^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

と書ける.

従って, 伝送波は (3.4) から (3.13) までの方程式で記述されることがわかる.

伝送波の方程式は解けたと仮定し, ここでは, 伝送波の電力について述べよう. Poynting ベクトルを計算すると,

$$\overline{E \wedge H} = \overline{E' \wedge H'} + (\overline{E' \wedge H_z} - \overline{E_z \wedge H'}) \wedge dz \tag{3.15}$$

となる. つまり, M を通過する全電力は

$$\int_M \overline{E' \wedge H'} \tag{3.16}$$

で計算できる.

3.2 伝送線

$M \times \mathbb{R}$ が伝送線であるとは, 多様体 M の境界値 ∂M が 2 つの連結成分 $(\partial M)^+$, $(\partial M)^-$ に分かれているものをいう. また, 伝送波が TEM 波であるとは, 電場も磁場も z 軸に平行な成分を持たないものをいう. ここでは, 伝送線 $M \times \mathbb{R}$ 内の TEM 波について調べよう.

仮定より, $E_z = 0$, $H_z = 0$, $B'' = 0$, $D'' = 0$ であるから, (3.4), (3.6), (3.7), (3.9) より,

$$dB' = 0, \tag{3.17}$$
$$dE' = 0, \tag{3.18}$$
$$dD' = 0, \tag{3.19}$$
$$dH' = 0, \tag{3.20}$$

が得られる. また, (3.5), (3.8) より

$$\beta E' + \omega B' = 0, \tag{3.21}$$
$$\beta H' - \omega D' = 0, \tag{3.22}$$

が得られる.

これらの方程式が自明でない解を持つためには, (3.21), (3.22), (3.10), (3.12) から, 伝播波数 β は k に等しくなければならない. そこで, 以下, $\beta = k$ を仮定する.

今, M 上の関数 ϕ で

$$E' = -d\phi \tag{3.23}$$

を満たすものがあると仮定すると,

$$\begin{aligned} \triangle_g \phi &= *_g d *_g d\phi, \\ &= - *_g d *_g E', \\ &= -\frac{1}{\epsilon} *_g dD', \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

が成り立たなければならない. 逆に, M 上の関数 ϕ で,

$$\triangle_g \phi = 0 \tag{3.25}$$

を満たすものが与えられれば,

$$\begin{aligned} E' &:= -d\phi, \\ B' &:= \frac{1}{c} d\phi, \\ H' &:= -\frac{1}{\eta} *_g d\phi, \\ D' &:= -\frac{1}{\eta c} *_g d\phi \end{aligned} \tag{3.26}$$

とおくことにより, 伝送波の方程式の解が得られる. したがって, Laplace 方程式 (3.25) を解けばよいことがわかった. ϕ が一意に決まるには境界条件が必要である. ここでは次のような条件を仮定しよう. M の境界を ∂M, 埋め込み写像を $\iota : \partial M \to M$ と書くとき, 電場 E が ∂M に対し垂直であるという条件

$$\iota^* E' = 0 \tag{3.27}$$

と, 磁束密度 B が ∂M に対し平行であるという条件

$$\iota^* B' = 0 \tag{3.28}$$

を仮定する. これらの条件 (3.27) と (3.28) は, ϕ を用いて

$$\iota^* d\phi = 0 \tag{3.29}$$

と表すことができる.

$(\partial M)^+ \times \mathbb{R}$ の $z \in \mathbb{R}$ における切り口で $Q(z)$ の電荷が蓄えられ, 線路方向に $I(z)$ の電流が流れているとする. このとき, $(\partial M)^- \times \mathbb{R}$ 側の $z \in \mathbb{R}$ における切り口では, $-Q(z)$ の電荷が蓄えられ, $-I(z)$ の電流が流れている. また, $Q(z)$ と $I(z)$ は, 定数 Q_0, I_0 を用いて

$$Q(z) = Q_0 e^{-jkz}, \tag{3.30}$$

$$I(z) = I_0 e^{-jkz} \tag{3.31}$$

の形で書けていると仮定する. このとき, 境界条件として, 電束密度 D と磁場 H に対し

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial M)^+} \iota^* D' &= Q_0, \\
\int_{(\partial M)^-} \iota^* D' &= -Q_0, \\
\int_{(\partial M)^+} \iota^* H' &= I_0, \\
\int_{(\partial M)^-} \iota^* H' &= -I_0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

を仮定する. 式 (3.22) との整合性を満たすには Q_0 と I_0 は独立に選ぶことはできず,

$$\frac{1}{c} I_0 - Q_0 = 0 \tag{3.33}$$

を仮定しなければならない. (3.32) と同値な条件を ϕ を用いると

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial M)^+} *_g d\phi &= -\eta I_0, \\
\int_{(\partial M)^-} *_g d\phi &= \eta I_0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

と表すことができる.

以上により, 伝送線内の電磁波は境界条件 (3.29), (3.34) の下で, Laplace 方程式 (3.25) を解けば求められることがわかった.

さて, 境界値問題が解けたと仮定して, 伝送線についてさらに調べよう. $(\partial M)^+$ 上の一点から $(\partial M)^-$ 上の一点までの積分路 l を一つ取り,

$$V_0 := \int_l E' \tag{3.35}$$

とおく. (3.27) より, V_0 の値は l の選びかたによらない. このとき $z \in \mathbb{R}$ における $M \times \mathbb{R}$ の切り口での電圧 $V(z)$ が次の式で表される.

$$V(z) = V_0 e^{-jkz}. \tag{3.36}$$

さらに, V_0 の値は次のようにも表現できる. ϕ は境界条件 (3.29) より, $(\partial M)^+$ および $(\partial M)^-$ 上で一定値を取る. したがって, ϕ の $(\partial M)^+$ 上の値を ϕ_0^+, $(\partial M)^-$ 上の値を ϕ_0^- とおけば, V_0 は (3.35) より

$$V_0 = \phi_0^+ - \phi_0^- \tag{3.37}$$

と書ける. 特に, (3.37) の式の形から, V_0 は I_0 と比例関係にある. つまり, V_0/I_0 の値は (M, g) の幾何学的な性質のみから定まる. ここで,

$$Z_0 := \frac{V_0}{I_0} \tag{3.38}$$

とおく.

定義 3.2. Z_0 を特性インピーダンスと呼ぶ.

Z_0 から伝送線に関する様々な量が得られる.

$C_0 := Q_0/V_0$ を伝送線のキャパシタンスと呼ぶ. キャパシタンスは (3.33) と (3.38) から

$$C_0 = \frac{1}{cZ_0} \tag{3.39}$$

となることがわかる.

$$\Phi_0 := -\int_l B' \tag{3.40}$$

とおき, さらに

$$\Phi(z) := \Phi_0 e^{-jkz} \tag{3.41}$$

とおけば, これは $M \times \mathbb{R}$ の $z \in \mathbb{R}$ における切り口での磁束となる. そこで, $L_0 := \Phi_0/I_0$ とおき, この値を伝送線のインダクタンスと呼ぶ. Φ_0 は

$$\Phi_0 = \frac{1}{c}(\phi_0^+ - \phi_0^-) \tag{3.42}$$

$$= \frac{1}{c}V_0 \tag{3.43}$$

とも書けるから,

$$L_0 = \frac{Z_0}{c} \tag{3.44}$$

が成り立つ.

特に,

$$C_0 L_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{3.45}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{3.46}$$

が成り立つ.

3.3 同軸管

半径が a の中心導体, 内径 b の外部導体からなる同軸管の特性インピーダンスを求めてみよう. 多様体

$$M := \{(r,\theta) : a < r < b,\ 0 < \theta < 2\pi\} \tag{3.47}$$

に対し, 計量 g を

$$g := dr^2 + r^2\,d\theta^2 \tag{3.48}$$

で定めると, (M,g) は 2 次元 Riemann 多様体となる. なお, M の向きは (r,θ) が正の局所座標となるように決めておく. M 上の関数 ϕ に関する Laplace 方程式 (3.25) は局所座標 (r,θ) を用いて

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{3.49}$$

と書ける. また, 境界条件 (3.29) は

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right|_{r=a} &= 0, \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

と書ける. もう一つの境界条件 (3.34) は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} a\,d\theta &= -\eta I, \\ -\int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=b} b\,d\theta &= \eta I \end{aligned} \tag{3.51}$$

と書ける. $\{r=a\}$ 上では座標 θ は正の向き, $\{r=b\}$ 上では θ は負の向きであることに注意せよ.

方程式 (3.49) を境界条件 (3.50), (3.51) の下で解くと,

$$\phi(r,\theta) = -\frac{\eta I_0}{2\pi}\log r + \mathrm{Const.} \tag{3.52}$$

を得る. 従って, 中心導体と外部導体間の電圧は

$$V_0 = \phi|_{r=b} - \phi|_{r=a} \tag{3.53}$$

$$= \frac{\eta I_0}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.54}$$

となり, 特性インピーダンスは

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.55}$$

となる.

3.4 導波管

$M \times \mathbb{R}$ が導波管であるとは, M が単連結であるときをいう. このとき, M の境界 ∂M は連結である. また, 伝送波が TE 波であるとは, 電場が z 軸に平行な成分を持たないときをいう. 同様に, 伝送波が TM 波であるとは, 磁場が z 軸に平行な成分を持たないときをいう. ここでは, 導波管に流れる伝送波で TE 波または TM 波を調べよう.

TE 波は $E_z = 0$ かつ $H_z \neq 0$ であり, TM 波は $E_z \neq 0$ かつ $H_z = 0$ である. つまり, E_z と H_z の内, 少なくとも一方は 0 でない. まず, E_z と H_z を求めるため, E_z, H_z の満たすべき方程式を導こう. $\triangle_g E_z$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\triangle_g E_z &= *_g d *_g dE_z \\
&= *_g d *_g (-j\beta E' - j\omega B') \\
&= -j\beta * d * E' - j\omega * d * B' \\
&= -\frac{j\beta}{\epsilon} * dD' + j\omega\mu * dH' \\
&= -\frac{j^2\beta^2}{\epsilon} * D'' + j^2\omega^2\mu * D'' \\
&= -j^2\beta^2 E_z + j^2\omega^2\mu\epsilon E_z \\
&= -\left(k^2 - \beta^2\right) E_z
\end{aligned} \tag{3.56}$$

となる. ここで, 遮断波数 k_c を

$$k_c := \sqrt{k^2 - \beta^2} \tag{3.57}$$

とおくと,

$$\triangle_g E_z + k_c^2 E_z = 0 \tag{3.58}$$

と書くことができる. 同様に, $\triangle_g H_z$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\triangle_g H_z &= *_g d *_g dH_z \\
&= *_g d *_g (-j\beta H' + j\omega D') \\
&= -j\beta *_g d *_g H' + j\omega *_g d *_g D' \\
&= -\frac{j\beta}{\mu} *_g dB' - j\omega\epsilon *_g dE' \\
&= -\frac{j^2\beta^2}{\mu} *_g B'' + j^2\omega^2\epsilon *_g B'' \\
&= -j^2\beta^2 H_z + j^2\omega^2\epsilon\mu H_z \\
&= -(k^2 - \beta^2) H_z
\end{aligned} \tag{3.59}$$

となるから,

$$\triangle_g H_z + k_c^2 H_z = 0 \tag{3.60}$$

が成り立つ. ここで, 完全導体の性質として, 電場が導体表面と直交すること, 即ち

$$\iota^* E_z = 0, \tag{3.61}$$

$$\iota^* E' = 0 \tag{3.62}$$

が成り立ち, 磁束密度が導体表面と平行であること, 即ち,

$$\iota^* B' = 0 \tag{3.63}$$

が成り立つ. 特に,

$$\begin{aligned} *_g dH_z &= j\beta *_g H' - j\omega *_g D' & (3.64) \\ &= \frac{j\beta}{\mu} B' + \frac{j\omega}{\epsilon} E' & (3.65) \end{aligned}$$

となるから, (3.62), (3.63) より

$$\iota^* *_g dH_z = 0 \tag{3.66}$$

を得る.

(3.58), (3.60) は (3.61), (3.66) を境界条件とする固有値問題とみなすことが出来る.

以下, 固有値問題が解けたとして, 導波管内の電磁波を詳しく調べよう. 固有値を k_c^2, それに付随する固有関数を E_z と H_z とする. E_z と H_z の少なくとも一方は非自明である.

すると, (3.5) および (3.12) より

$$dE_z + j\beta E' + j\omega\mu *_g H' = 0 \tag{3.67}$$

が成り立つ. また, (3.8) および (3.10) より

$$dH_z + j\beta H' - j\omega\epsilon *_g E' = 0 \tag{3.68}$$

となるので, (3.67) と (3.68) を連立して解けば

$$\begin{aligned} E' &= \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} \left(dE_z - \frac{k}{\beta} \eta *_g dH_z \right), & (3.69) \\ H' &= \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} \left(\frac{k}{\beta} \frac{1}{\eta} *_g dE_z + dH_z \right) & (3.70) \end{aligned}$$

となる.

例 3.3. 横の長さ a, 縦の長さ b の方形導波管を考えよう.

$$\begin{aligned} M &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le b \right\}, & (3.71) \\ g &:= dx^2 + dy^2 & (3.72) \end{aligned}$$

とおく. このとき, 方程式 (3.58), (3.60) は

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\} E_z + k_c^2 E_z = 0, \tag{3.73}$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\} H_z + k_c^2 H_z = 0 \tag{3.74}$$

と書ける. 境界条件 (3.61), (3.66) は

$$\begin{aligned} &E_z(0, y) = 0, \quad E_z(a, y) = 0, \quad E_z(x, 0) = 0, \quad E_z(x, b) = 0, \\ &\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \end{aligned} \tag{3.75}$$

と表せる．これらを解くと, m, n を非負整数として,

$$\begin{aligned} k_c^{(m,n)} &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \\ E_z^{(m,n)}(x,y) &= E_0^{(m,n)} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ H_z^{(m,n)}(x,y) &= H_0^{(m,n)} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \tag{3.76}$$

が得られる．但し, $E_0^{(m,n)}$, $H_0^{(m,n)}$ は定数である．

参考文献

[1] 三好 旦六, 光・電磁波論, 培風館, 2002.

[2] 堤 誠, 電磁波工学ノート, 総合電子出版社, 1998.

[3] 谷口 慶治, アンテナと電波伝搬, 共立出版, 2006.

[4] George Cain and Gunter H. Meyer, Separation of Variables for Partial Differential Equations : An Eigenfunction Approach, CRC Pr I Llc, 2006.

[5] Andrews, Larry C., Introduction to Differential Equations with Boundary Value Problems,Harpercollins College Div, 1991.

[6] Rene Dennemeyer, Introduction to partial differential equations and Boundary value problems, McGraw-Hill, 1968.

[7] William B. Miller, Mayer Humi, Boundary Value Problems and Partial Differential Equations, Pws Pub Co, 1991.

[8] Andrews G. E., Askey R., Roy R., Special Functions, Encycl. Math and its Appl., 71, Cambridge, 1999.

[9] 犬井 鉄郎, 特殊関数, 岩波文庫, 1962.

[10] Frank W., J. Oliver, Asymptotics and Special Functions, AKP classics, A K Peters, 1997.