電磁気学ノート

Palais Blanc

目次

1 多様体上の解析

この節では, 電磁気現象を記述するために必要な数学として, 多様体上の微分作用素と積分の基本事項について簡単に述べる. 通常, 電磁気学の記述にはベクトル解析が用いられるが, このノートでは座標によらない記述を徹底するために多様体の理論を用いる. これによって, 直交座標以外の円筒座標や極座標といった様々な座標を見通し良く自由に使うことができ, 利便性が向上するだろう.

多様体についての詳しい解説書として, Spivak [2], 砂田 [3], 和達 [5] を挙げておく.

1.1 Hodge の星作用素

M を n 次元多様体, TM を M の接バンドルとする.

定義 1.1. g が TM の (正値とは限らない非退化な) 計量であるとは, M 上の各点 x に対し, 接ベクトル空間 T_xM の (正値とは限らない非退化な) 計量 g_x が与えられ, $x \mapsto g_x$ が滑らかなときをいう.

$(x^1, \ldots, x^n)$ を M の局所座標とするとき,

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{1.1}$$

とおくと, $(g_{ij})_{ij}$ は対称かつ非退化な行列で,

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1.2}$$

と書くことができる. ここで, $\det(g_{ij})_{ij}$ は正または負のどちらかで, しかもその符号は座標の取り方によらないことがわかる. その符号を g の符号といい,

$$\operatorname{sgn} g := \begin{cases} 1 & g \text{ の符号が正} \\ -1 & g \text{ の符号が負} \end{cases} \tag{1.3}$$

とおく.

TM の計量 g は, 余接バンドル T^*M の計量 g^{-1} を定める. 1 次微分形式 α, β を局所座標表示

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_i \alpha_i\, dx^i, \\ \beta &= \sum_j \beta_j\, dx^j \end{aligned} \tag{1.4}$$

したとき,

$$g^{-1}(\alpha, \beta) := \sum_{ij} g^{ij} \alpha_i \beta_j \tag{1.5}$$

とおく. 但し, $(g^{ij})_{ij}$ は $(g_{ij})_{ij}$ の逆行列である. これは座標の取りかたによらないことが容易に示され, g^{-1} は T^*M の計量になることがわかる.

さらに, $k=1,\dots,n$ のとき, 計量 g は外積バンドル $\bigwedge^k T^*M$ の自然な計量を引き起こす. 実際, 1 次微分形式 $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_k$ に対し,

$$\langle \alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k, \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k\rangle_g := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (\operatorname{sgn}\sigma) g^{-1}(\alpha_1,\beta_{\sigma(1)})\cdots g^{-1}(\alpha_k,\beta_{\sigma(k)}) \tag{1.6}$$

$$= \det\begin{pmatrix} g^{-1}(\alpha_1,\beta_1) & \cdots & g^{-1}(\alpha_1,\beta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{-1}(\alpha_k,\beta_1) & \cdots & g^{-1}(\alpha_k,\beta_k)\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

とおくと, 行列式の性質と外積代数の普遍性から $\langle\ ,\ \rangle_g$ は $\bigwedge^k T^*M$ の計量になることが確認できる.

定義 1.2. n 次元多様体 M が向きづけ可能であるとは, いたるところ 0 でない n 次微分形式 α がとれるときをいう. このような n 次微分形式を選ぶことを M の向きづけという.

今, M は n 次微分形式 α により向きづけられているとする. このとき, M の局所座標 $(x^1,\dots,x^n)$ は次のようにして正または負に分類することができる. α を次のように座標表示する.

$$\alpha = \alpha_0\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n. \tag{1.8}$$

すると, $\alpha_0\neq 0$ であるから, α_0 は正または負のどちらかである. α_0 が正のとき局所座標 $(x^1,\dots,x^n)$ は正であるといい, α_0 が負のとき局所座標 $(x^1,\dots,x^n)$ は負であるという.

以下, n 次元多様体 M は向きづけられ, TM に計量 g が与えられていると仮定する.

定義 1.3. 次の 2 つの条件を満たす n 次微分形式 V_g が一意に定まる. V_g を体積要素と呼ぶ.

(i) 正の局所座標 $(x^1,\dots,x^n)$ により

$$V_g = V_0\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \tag{1.9}$$

と表示したとき, $V_0>0$.

(ii) $\langle V_g, V_g\rangle_g = \operatorname{sgn} g$.

正の局所座標 $(x^1,\dots,x^n)$ を用いて g を (1.2) の形に表示しておくと, V_g は

$$V_g := \sqrt{|\det(g_{ij})_{ij}|}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \tag{1.10}$$

と書ける.

定義 1.4. 次の条件を満たすバンドル写像 $*_g : \bigwedge^k T^*M \to \bigwedge^{n-k} T^*M$ が一意的に存在する. この写像を Hodge の星作用素という.

$$\text{任意の } k \text{ 次微分形式 } \alpha,\ \beta \text{ に対し, } \alpha\wedge *_g\beta = \langle\alpha,\beta\rangle_g V_g. \tag{1.11}$$

$(x^1,\dots,x^n)$ を正の局所座標とし, g を (1.2) の形に表示しておく. すると, 等式

$$*_g(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}) = \frac{\sqrt{|\det(g_{ij})_{ij}|}}{(n-k)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn}\sigma) g^{\sigma(1)i_1}\cdots g^{\sigma(k)i_k}\, dx^{\sigma(k+1)}\wedge\cdots\wedge dx^{\sigma(n)} \tag{1.12}$$

が成り立つ.

命題 1.5. α, β を k 次微分形式とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\alpha \wedge *_g\beta = \beta \wedge *_g\alpha = (-1)^{k(n-k)}(*_g\alpha) \wedge \beta$.

(ii) $*_g *_g \alpha = (\operatorname{sgn} g)(-1)^{k(n-k)}\alpha$.

(iii) $*_g 1 = V_g$.

(iv) $*_g V_g = (\operatorname{sgn} g)$.

注意 1.6. $*_g$ と同様に，次の条件を満たす写像 $\star_g : \bigwedge^k T^*M \to \bigwedge^{n-k} T^*M$ も定義される．

$$\text{任意の } k \text{ 次微分形式 } \alpha, \beta \text{ に対し，} (\star_g\alpha) \wedge \beta = \langle \alpha, \beta \rangle_g V_g. \tag{1.13}$$

この $\star_g$ も Hodge の星作用素と呼ぶ．命題 1.5 から，任意の k 次微分形式 α に対し

$$*_g\alpha = (-1)^{k(n-k)} \star_g \alpha \tag{1.14}$$

が成り立つことがわかる．このノートでは $*_g$ のみを用いる．

1.2 微分作用素

M を n 次元多様体とする．整数 $k = 0, \ldots, n$ に対し，M 上の k 次微分形式全体を $\mathcal{A}^k(M)$, M 上の外微分作用素を $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ と書く．外微分作用素 d は線形写像で，つぎの性質を満たす．

(i) $f \in \mathcal{A}^0(M)$ に対し，df は M の局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いて

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i \tag{1.15}$$

と書ける．

(ii) $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$, $\beta \in \mathcal{A}^l(M)$ に対し，

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \tag{1.16}$$

が成り立つ．

(iii) $d^2 = 0$.

今，TM の計量 g が与えられ，さらに M は向きづけられていると仮定する．すると，次のような微分作用素が定義される．

定義 1.7. 線型写像 $d_g^* : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$ を

$$d_g^* := -(\operatorname{sgn} g)(-1)^{n(k-1)} *_g d *_g \tag{1.17}$$

で定める．この d_g^* を d の随伴作用素または余微分作用素という．

命題 1.8. $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $d_g^* d_g^* \alpha = 0$.

(ii) $*_g d_g^* \alpha = (-1)^k d *_g \alpha$.

(iii) $*_g d\alpha = (-1)^{k+1} d_g^* *_g \alpha$.

(iv) $\beta \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$ ならば $\langle d\alpha, \beta\rangle_g V_g = d(\alpha \wedge *_g \beta) + \langle \alpha, d_g^* \beta\rangle_g V_g$.

定義 1.9. M 上の Laplace 作用素 $\triangle_g : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^k(M)$ を

$$\triangle_g := -(d_g^* d + d d_g^*) \tag{1.18}$$

で定める. 特に, g が Lorentz 計量のとき $\square_g$ と書き, M 上の d'Alembert 作用素と呼ぶ.

命題 1.10. $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\triangle_g *_g \alpha = *_g \triangle_g \alpha$.

(ii) $\triangle_g d\alpha = d\triangle_g \alpha$.

(iii) $\triangle_g d_g^* \alpha = d_g^* \triangle_g \alpha$.

(iv) $\beta \in \mathcal{A}^k(M)$ ならば

$$\langle \triangle_g \alpha, \beta\rangle_g V_g = \langle \alpha, \triangle_g \beta\rangle_g V_g + d(-\alpha \wedge *_g d\beta + \beta \wedge *_g d\alpha - d_g^* \alpha \wedge *_g \beta + d_g^* \beta \wedge *_g \alpha). \tag{1.19}$$

1.3 多様体上の積分

M を向きづけられた n 次元多様体とする. このとき, M 上の n 次微分形式 α に対し, 積分を考えることができる. M の正の局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ をひとつとり, その局所座標を定義する M の開部分集合を U とする. もし, α の台が U に含まれているならば, α の局所座標表示

$$\alpha = \alpha_0(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{1.20}$$

により, 積分は

$$\int_M \alpha := \int_U \alpha_0(x) \mu(dx^1 \cdots dx^n) \tag{1.21}$$

で定義される. 但し, μ は $\mathbb{R}^n$ の標準的な Lebesgue 測度である. 積分の変数変換の公式から, 積分の値は座標の取り方に依存しないことが確かめられる. また, α の台が U に含まれるとは限らない一般の場合は, 単位の分解を用いて U に含まれる場合に帰着する. 詳細は多様体の専門書に譲り, このノートでは省略する.

多様体の積分において基本的な Stokes の定理について述べよう. そのため, 今度は M を向きづけられた境界つき多様体とする. このとき, M の境界 ∂M の向きを次のようにして決める. M 正の局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ で

$$\begin{aligned} (x^1, \ldots, x^n) \in M &\Longleftrightarrow x^n \geq 0, \\ (x^1, \ldots, x^n) \in \partial M &\Longleftrightarrow x^n = 0. \end{aligned} \tag{1.22}$$

が成り立つものを選ぶ. すると, $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ は ∂M の局所座標となる. このとき,

$$\begin{aligned} &n \text{ が偶数ならば } (x^1, \ldots, x^{n-1}) \text{ は正の向き}, \\ &n \text{ が奇数ならば } (x^1, \ldots, x^{n-1}) \text{ は負の向き} \end{aligned} \tag{1.23}$$

となるように ∂M の向きを決める. すると, 次が成り立つ.

定理 1.11 (Stokes の定理)**.** M 上のコンパクトな台をもつ $n-1$ 次微分形式 ω に対し,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega \tag{1.24}$$

が成り立つ. 但し, ι は ∂M から M への埋め込み写像, ι^* は ι から誘導される余接バンドルの引き戻し写像である.

この定理の証明は, 例えば Spivak [2] の第 1 巻, 第 8 章に書かれている.

最後に, 微分作用素と積分の関係についてまとめておこう. TM の計量 g が与えられていると仮定する.

命題 1.12. $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$, $\beta \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$ とし, どちらか一方はコンパクトな台をもつと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$\int_M \langle d\alpha, \beta \rangle_g V_g = \int_{\partial M} \alpha \wedge *_g \beta + \int_M \langle \alpha, d_g^* \beta \rangle_g V_g. \tag{1.25}$$

特に, M が境界を持たない多様体のときは,

$$\int_M \langle d\alpha, \beta \rangle_g V_g = \int_M \langle \alpha, d_g^* \beta \rangle_g V_g \tag{1.26}$$

となる. これは, d の随伴が d_g^* であることを示している.

命題 1.13. $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^k(M)$ とし, どちらか一方はコンパクトな台をもつと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$\int_M \langle \triangle_g \alpha, \beta \rangle_g V_g = \int_M \langle \alpha, \triangle_g \beta \rangle_g V_g + \int_{\partial M} (-\alpha \wedge *_g d\beta + \beta \wedge *_g d\alpha - d_g^* \alpha \wedge *_g \beta + d_g^* \beta \wedge *_g \alpha). \tag{1.27}$$

この命題は, Laplace 作用素 $\triangle_g$ の随伴がそれ自身であることを示している.

2 静電場

真空中に静止した電荷があると, その周囲には静電場が発生する. この節では, 電荷の分布を任意に与え, そのとき発生する静電場の分布を決定する問題を扱う. まず, 3 次元 Riemann 多様体上で電荷や電場等の物理量を定義し, 静電場の基本方程式について述べる. 次に, スカラーポテンシャルを導入し, 静電場の基本方程式が, Poisson 方程式を解く問題に帰着できることを示す. そして, 空間が Euchlid 空間の場合に基本方程式を解き, Coulomb の法則を導く.

Poisson 方程式を解くため, このノートでは超函数と Fourier 変換の理論を使う. Poisson 方程式の解法については, 谷島 [6] が詳しい.

2.1 静電場の基本方程式

(M, g) を向きづけられた 3 次元 Riemann 多様体とする.

定義 2.1 (電荷)**.** M 内に分布している電荷は, M 上の 3 次微分形式 ρ で表現される. この ρ を電荷密度という. また, M 内の領域 V に対し,

$$\int_V \rho \tag{2.1}$$

を V 内の電気量という.

定義 2.2 (電気双極子)**.** M 内に分布している電気双極子は, M 上の 2 次微分形式 p で表現される. p を電気双極子密度という. また, 電気双極子は電荷分布を定める. その電荷密度 ρ は

$$\rho = -dp \tag{2.2}$$

で与えられる.

定義 2.3 (電場と電束密度)**.** M 内に発生する静電場は M 上の 1 次微分形式 E および 2 次微分形式 D で表現される. E を電場, D を電束密度という.

M 内に電荷密度 ρ の電荷分布が与えられていると仮定する. このとき, 電場 E と電束密度 D は次の関係式を満たす.

$$dE = 0, \tag{2.3}$$

$$dD = \rho, \tag{2.4}$$

$$\epsilon_0 *_g E = D. \tag{2.5}$$

但し, ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数, $*_g$ は Riemann 計量 g から定まる Hodge の星作用素である.

定義 2.4. 方程式 (2.3) と (2.4) を静電方程式, (2.5) を構成方程式という.

構成方程式 (2.5) に現れる $*_g E$ を局所座標を用いて表そう. M の局所座標 (x^1, x^2, x^3) を一つ取り, Riemann 計量 g を

$$g = \sum_{ij} g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{2.6}$$

と表示しておく. $(g^{ij})_{ij}$ は $(g_{ij})_{ij}$ の逆行列を表すものとする. このとき, 電場 E を

$$E = E_1\,dx^1 + E_2\,dx^2 + E_3\,dx^3 \tag{2.7}$$

と表示しておくと, $*_g E$ は

$$\begin{aligned} *_g E = \quad & \left(E_1 g^{11} + E_2 g^{21} + E_3 g^{31}\right)\sqrt{\det g}\; dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left(E_1 g^{12} + E_2 g^{22} + E_3 g^{32}\right)\sqrt{\det g}\; dx^3 \wedge dx^1 \\ &+ \left(E_1 g^{13} + E_2 g^{23} + E_3 g^{33}\right)\sqrt{\det g}\; dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

と書ける.

定義 2.5. M 内の曲線 C に対し, 積分

$$\int_C E \tag{2.9}$$

を C に沿う起電力と呼ぶ. また, M 内の曲面 S に対し, 積分

$$\int_S D \tag{2.10}$$

を S に沿う電束と呼ぶ.

ρ を与えられた電荷密度, 電場 E および電束密度 D を静電方程式 (2.3), (2.4) および構成方程式 (2.5) の解であると仮定する.

定理 2.6 (Gauss の法則)**.** M 内の領域 V に対し, 次が成り立つ.

$$\int_{\partial V} D = \int_V \rho. \tag{2.11}$$

即ち, V の境界面 ∂V に沿う電束は V 内の電気量に等しい.

証明は, 式 (2.4) と Stokes の定理から明らかである.

2.2 スカラーポテンシャル

定義 2.7 (スカラーポテンシャル)**.** 電場 E に対し, M 上の関数 ϕ が存在して

$$E = -d\phi \tag{2.12}$$

と書けるとき, E はポテンシャル場であるといい, ϕ をスカラーポテンシャルという. また, M 内の点 a における値 $\phi(a)$ を点 a における電位という.

以下, 電場 E はポテンシャル場であると仮定し, そのスカラーポテンシャルを ϕ とする.

定理 2.8. a, b を M の点, a から b までを結ぶ曲線を C とする. このとき,

$$\int_C E = \phi(a) - \phi(b) \tag{2.13}$$

が成り立つ. 即ち, C に沿う起電力は a と b の電位差 $\phi(a) - \phi(b)$ に等しい. 特に, C が閉曲線ならば, C に沿う起電力は 0 である.

証明は, 定義式 (2.12) と Stokes の定理からただちに従う.

定理 2.9 (Poisson 方程式)**.** スカラーポテンシャル ϕ は次の式を満たす.

$$\triangle_g \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} *_g \rho. \tag{2.14}$$

但し, $\triangle_g$ は計量 g から定まる Laplace 作用素である.

証明. $\triangle_g = *_g d *_g d$ であることに注意し, (2.3), (2.4), (2.12) を適用すれば,

$$\begin{aligned}\triangle_g \phi &= *_g d *_g d\phi \\ &= - *_g d *_g E \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} *_g dD \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} *_g \rho.\end{aligned} \tag{2.15}$$

□

定理 2.10. 電荷密度 ρ が与えられ, M 上の関数 ϕ が Poisson 方程式 (2.14) を満たすとする. このとき, 電場 E を (2.12) で定め, 電束密度 D を (2.5) で定義すれば, E, D は静電方程式 (2.3), (2.4) を満たす.

証明. 外微分の性質より $dE = -d^2\phi = 0$ である. これは (2.3) を意味する. また, 定理 2.9 の証明を逆にたどっていけば (2.4) も容易に示される. □

この定理から, 静電場を求める問題は Poisson 方程式 (2.14) を解く問題に帰着する.

2.3 Coulomb の法則

空間 M が 3 次元 Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ の場合に, Poisson 方程式 (2.14) を解こう.

Euchlid 直交座標を $x = (x^1, x^2, x^3)$ で表すことにすると, Riemann 計量 g は

$$g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{2.16}$$

と書ける. 電荷密度 ρ を座標表示すると

$$\rho = \rho_0(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{2.17}$$

となるから, Poisson 方程式 (2.14) は

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2 \right\} \phi(x) = -\frac{\rho_0(x)}{\epsilon_0} \tag{2.18}$$

と同値である.

(2.18) を解くために, まず, $K(x)$ を未知関数とする次の補助的な微分方程式

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2 \right\} K(x) = \delta(x) \tag{2.19}$$

を解くことにしよう．但し, $\delta(x)$ は Dirac のデルタ函数である．$K(x)$ の Fourier 変換

$$\hat{K}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \exp(j\xi \cdot x)\, dx \tag{2.20}$$

を考える．ここで, j は虚数単位である．(2.19) の両辺を Fourier 変換すると

$$-|\xi|^2 \hat{K}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \tag{2.21}$$

となる．但し, $|\cdot|$ は Euchlid ノルムを表す．したがって, $\hat{K}(\xi)$ について解き, Foureir 逆変換すれば

$$K(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|^2} \exp(-j\xi \cdot x)\, d\xi \tag{2.22}$$

となる．この右辺を計算するには,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

なる等式を満たす行列式 1 の 3 次直交行列 U を一つ選び, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ から (r, w, θ) への座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} rw \\ r\sqrt{1-w^2}\cos\theta \\ r\sqrt{1-w^2}\sin\theta \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

を行う．すると (2.22) は

$$\begin{aligned} K(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 dw \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{r^2} \exp(-jrw|x|) r^2 \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(|x|r)}{|x|r}\, dr \\ &= -\frac{1}{2\pi^2|x|} \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\, ds \\ &= -\frac{1}{4\pi^2|x|} \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M \frac{\sin s}{s}\, ds \\ &= -\frac{1}{4\pi|x|} \end{aligned} \tag{2.25}$$

となる．これが (2.19) の解である．但し, 3 番目の等式では変数変換 $s := |x|r$ を行い, 最後の計算には等式

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta = \pi \tag{2.26}$$

を用いた．

したがって, 畳み込み積を計算すれば, 方程式 (2.18) の解

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\int_{\mathbb{R}^3} K(x-y) \frac{\rho_0(y)}{\epsilon_0}\, dy \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_0(y)}{|x-y|}\, dy \end{aligned} \tag{2.27}$$

が得られる．

最後に, 電場 E を計算しよう. 電場 E を

$$E = E_1(x)\,dx^1 + E_2(x)\,dx^2 + E_3(x)\,dx^3 \tag{2.28}$$

と表示しておけば, (2.12) より

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho_0(y)(x^1-y^1)}{|x-y|^3}\,dy, \\ E_2(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho_0(y)(x^2-y^2)}{|x-y|^3}\,dy, \\ E_3(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho_0(y)(x^3-y^3)}{|x-y|^3}\,dy \end{aligned} \tag{2.29}$$

を得る. これを Coulomb の法則という.

例 2.11 (点電荷の作る電場)**.** Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ の定点 $a = (a^1, a^2, a^3)$ に電気量 Q の点電荷があるとする. このとき周囲に発生する電場 E を求めてみよう. 電荷密度は

$$\rho = Q\delta(x-a)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{2.30}$$

と書ける. (2.27) よりスカラーポテンシャルは

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|x-a|} \tag{2.31}$$

となる. また, Coulomb の法則 (2.29) から電場は

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^1-a^1}{|x-a|^3}, \\ E_2(x) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^2-a^2}{|x-a|^3}, \\ E_3(x) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^3-a^3}{|x-a|^3} \end{aligned} \tag{2.32}$$

となることがわかる.

例 2.12 (点電気双極子が作る電場)**.** 電気双極子密度 p が

$$p = \delta(x-a)\left(p_1\,dx^2 \wedge dx^3 + p_2\,dx^3 \wedge dx^1 + p_3\,dx^1 \wedge dx^2\right) \tag{2.33}$$

の形で書き表されるものを考える. $a = (a^1, a^2, a^3)$ を点電気双極子の位置, (p_1, p_2, p_3) を点電気双極子のモーメントという.

(2.2) および (2.27) より, この点電気双極子が作るスカラーポテンシャルは

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_1(x^1-a^1)+p_2(x^2-a^2)+p_3(x^3-a^3)}{|x-a|^3} \tag{2.34}$$

となる.

2.4 静電場の多重極展開

Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の有界領域に電荷が分布している場合のスカラーポテンシャルの振舞いについて調べよう．まず,

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l P_l\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right) \tag{2.35}$$

なる級数展開を考える．級数が収束するのは, $|x|>|y|$ が成り立つときである．P_l は

$$P_l(t) := \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l \tag{2.36}$$

で定義される多項式であり, Legendre 多項式と呼ばれる．

今, 電荷密度 ρ_0 の台が原点を中心とする半径 R_0 の球体に含まれると仮定しよう．電荷が有界領域に分布しているから, R_0 を十分大きくとればこのようなことは常に可能である．このとき, (2.35) を使って, スカラーポテンシャル (2.27) を級数展開すれば

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l P_l\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right)\rho_0(y)\,dy \tag{2.37}$$

となる等式を得る．この等式は x が $|x|>R_0$ を満たすとき意味を持つ．

$l=0$ の項は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|}\int_{\mathbb{R}^3}\rho_0(y)\,dy \tag{2.38}$$

となる．これは, 電気量

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3}\rho_0(y)\,dy \tag{2.39}$$

の点電荷が原点に位置するときのスカラーポテンシャル (2.31) に一致する．

$l=1$ の項は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|^3}\int_{\mathbb{R}^3}(x\cdot y)\rho_0(y)\,dy \tag{2.40}$$

となる．これは, モーメントが

$$\begin{aligned} p_1 &:= \int_{\mathbb{R}^3} y^1\rho_0(y)\,dy, \\ p_2 &:= \int_{\mathbb{R}^3} y^2\rho_0(y)\,dy, \\ p_3 &:= \int_{\mathbb{R}^3} y^3\rho_0(y)\,dy \end{aligned} \tag{2.41}$$

で与えられる点電気双極子 (2.33) が原点にあるときに作られるスカラーポテンシャル (2.34) と一致する．

$l=2,3,\ldots$ と次数の高い項を加えていけば, スカラーポテンシャルの近似は精密になる．

級数展開 (2.35) の証明は, Lebedev [1] に載っている．

3　静磁場

電荷の流れである電流のうち, 時間が経過しても一定に保たれているものを定常電流と呼ぶ. そして, 定常電流はその周囲に静磁場を生む. この節では, 定常電流を任意に与え, そのとき周囲に発生する静磁場を決定する問題を扱う. 前節と同様, 3 次元 Riemman 多様体上で, 電流や磁場といった物理量を定義し, 静磁場を決定する基本方程式について述べる. また, ベクトルポテンシャルを導入し, 基本方程式を解く問題が Lorentz 条件の元での Poisson 方程式を解く問題に帰着することを示す. 最後に, 空間が Euchlid 空間の場合に, 基本方程式を解き, Biot-Savart の法則を導く.

3.1　静磁場の基本方程式

(M, g) を向きづけられた 3 次元 Riemann 多様体とする.

定義 3.1 (定常電流)**.** M 内を流れる定常電流の状態は, M 上の 2 次微分形式 i であって, 電気量保存則

$$di = 0 \tag{3.1}$$

を満たすもので表現される. この i を電流密度という. また, S を M 内の曲面とするとき,

$$\int_S i \tag{3.2}$$

を S を貫く電流という.

定義 3.2 (磁気双極子)**.** M 内の磁気双極子は M 上の 1 次微分形式 m で表現される. m を磁気双極子密度という. また, 磁気双極子はひとつの電流分布を定める. その電流密度 i は

$$i := dm \tag{3.3}$$

で与えられる.

磁気双極子 m から定まる電流密度 (3.3) は, 電気量保存則 (3.1) を常に満たしている. なぜなら, 外微分の性質より $di = d^2m = 0$ となるからである.

定義 3.3 (線電流)**.** M 内の線電流とは, M 内の閉曲線 C および実数 i_0 で表現される. C を回路, i_0 を電流の大きさという. この線電流を表現する電流密度 i は, カレントとして次の式で定義される.

$$\int_M i \wedge f := i_0 \int_C \iota^* f. \tag{3.4}$$

但し, f は M 上のコンパクト台を持つ 1 次微分形式, $\iota : C \to M$ は埋め込み写像である.

線電流が定めるカレント i が電気量保存則 (3.1) を満たすことを確認しておこう. g を 任意の M 上のコンパクト台を持つ関数とすると,

$$\begin{aligned} \int_M di \wedge g &= -\int_M i \wedge dg \\ &= i_0 \int_C \iota^* dg \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

となるから, $di=0$ が従う. 但し, 1 番目の等式はカレントの微分の定義であり, 3 番目の等式は C が境界を持たないことから従う.

定義 3.4 (磁場と磁束密度)**.** M 内に発生する静磁場の状態は M 上の 2 次微分形式 B および 1 次微分形式 H により表現される. B を磁束密度, H を磁場という.

電気量保存則 (3.1) を満たす電流密度 i が与えられていると仮定する. このとき, 磁束密度 B と磁場 H は次の関係式を満たす.

$$dB = 0, \tag{3.6}$$

$$dH = i, \tag{3.7}$$

$$*_g B = \mu_0 H. \tag{3.8}$$

但し, μ_0 は真空の透磁率と呼ばれる定数である.

定義 3.5. 方程式 (3.6) と (3.7) を静磁方程式, (3.8) を構成方程式という.

構成方程式 (3.8) に現れる $*_g B$ を局所座標を用いて表そう. 局所座標を (x^1, x^2, x^3) とし, Riemann 計量を (2.6) と表示しておく. このとき,

$$B = B_1\, dx^2 \wedge dx^3 + B_2\, dx^3 \wedge dx^1 + B_3\, dx^1 \wedge dx^2 \tag{3.9}$$

と表示しておくと, $*_g B$ は次のように書ける.

$$\begin{aligned} *_g B = \quad & (B_1 g_{11} + B_2 g_{12} + B_3 g_{13}) \sqrt{\det g^{-1}}\ dx^1 \\ & + (B_1 g_{21} + B_2 g_{22} + B_3 g_{23}) \sqrt{\det g^{-1}}\ dx^2 \\ & + (B_1 g_{31} + B_2 g_{32} + B_3 g_{33}) \sqrt{\det g^{-1}}\ dx^3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

定義 3.6. S を M 内の曲面とするとき, 積分

$$\int_S B \tag{3.11}$$

を S に沿う磁束という. また, C を M 内の曲線とするとき, 積分

$$\int_C H \tag{3.12}$$

を C に沿う起磁力という.

電気量保存則 (3.1) を満たす電流密度 i が与えられ, 磁束密度 B と磁場 H が 静磁方程式 (3.6), (3.7), 構成方程式 (3.8) を満たしていると仮定する.

定理 3.7 (Ampère の法則)**.** S を M 内の曲面とするとき, S の境界 ∂S に沿う起磁力は, S を通過する電流に等しい. 即ち,

$$\int_{\partial S} H = \int_S i \tag{3.13}$$

が成り立つ.

証明は, Stokes の定理を適用すればよい.

3.2 ベクトルポテンシャル

定義 3.8 (ベクトルポテンシャル)**.** B を磁束密度とする. 1 次微分形式 A が存在して

$$B = dA \tag{3.14}$$

を満たすとき, この A をベクトルポテンシャルという.

定理 3.9. 磁束密度 B がベクトルポテンシャル A を持つと仮定する. このとき, もし A がさらに条件

$$d_g^* A = 0 \tag{3.15}$$

を満たせば, 次が成り立つ.

$$\triangle_g A = -\mu_0 *_g i. \tag{3.16}$$

但し, d_g^* は g から定まる余微分作用素, $\triangle_g$ は g から定まる Laplace 作用素である.

証明. $d_g^* = *_g d *_g$, $\triangle_g = - *_g d *_g d + d *_g d *_g$ に注意し, (3.7), (3.8), (3.14), (3.15) を適用すれば,

$$\begin{aligned}
\triangle_g A &= (- *_g d *_g d + d *_g d *_g) A \\
&= - *_g d *_g dA \\
&= - *_g d *_g B \\
&= -\mu_0 *_g dH \\
&= -\mu_0 *_g i.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

□

定義 3.10. (3.15) を Lorentz 条件, (3.16) を Poisson 方程式という.

定理 3.11. 電気量保存則 (3.1) を満たす電流密度 i が与えられ, M 上の 1 次微分形式 A が Lorentz 条件 (3.15) および Poisson 方程式 (3.16) を満たすと仮定する. このとき, 磁束密度 B を (3.14) で定め, 磁場 H を (3.8) で定義すれば, B, H は静磁方程式 (3.6), (3.7) を満たす.

証明. (3.6) は外微分の性質より $dB = d^2 A = 0$ となるから, (3.6) が従う. (3.7) を確認するには, 定理 3.9 の証明を逆にたどっていけばよい. □

以上から, 静磁場の分布を求める問題は (3.15) と (3.16) を解く問題に帰着された.

3.3 Biot-Savart の法則

M が 3 次元 Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ の場合に, (3.15) と (3.16) を解いてみよう.

Euchlid 直交座標を $x = (x^1, x^2, x^3)$ とし, 電流密度 i を

$$i = i_1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + i_2(x)\, dx^3 \wedge dx^1 + i_3(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \tag{3.18}$$

と表現しておくと, 電気量保存則 (3.1) は

$$\frac{\partial i_1}{\partial x^1} + \frac{\partial i_2}{\partial x^2} + \frac{\partial i_3}{\partial x^3} = 0 \tag{3.19}$$

と等価である.

ベクトルポテンシャル A を

$$A = A_1(x)\,dx^1 + A_2(x)\,dx^2 + A_3(x)\,dx^3 \tag{3.20}$$

と表現しておけば, Lotentz 条件 (3.15) は

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0 \tag{3.21}$$

と等価であり, (3.16) は

$$\begin{aligned}
\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\} A_1(x) &= -\mu_0 i_1(x),\\
\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\} A_2(x) &= -\mu_0 i_2(x),\\
\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\} A_3(x) &= -\mu_0 i_3(x)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

と等価である.

電気量保存則 (3.19) を仮定して, 微分方程式 (3.21), (3.22) を解いてみよう. (3.22) は 3 つの独立した Poisson 方程式であるから, 前節の (2.18) と同様の議論を行えば解ける. 即ち, (3.22) の解として

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{i_1(y)}{|x-y|}\,dy,\\
A_2(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{i_2(y)}{|x-y|}\,dy,\\
A_3(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{i_3(y)}{|x-y|}\,dy
\end{aligned} \tag{3.23}$$

を得る. あとは, この解が Lorentz 条件 (3.21) を満たすことを確かめればよい. (3.21) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x^1-y^1)i_1(y) + (x^2-y^2)i_2(y) + (x^3-y^3)i_3(y)}{|x-y|^3}\,dy\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ i_1(y)\frac{\partial}{\partial y^1} + i_2(y)\frac{\partial}{\partial y^2} + i_3(y)\frac{\partial}{\partial y^3}\right\} \frac{1}{|x-y|}\,dy\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|}\left(\frac{\partial i_1(y)}{\partial y^1} + \frac{\partial i_2(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial i_3(y)}{\partial y^3}\right) dy\\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

となる. 最後の等式で, 電気量保存則 (3.19) を用いた.

したがって, 磁束密度 B を

$$B = B_1(x)\,dx^2\wedge dx^3 + B_2(x)\,dx^3\wedge dx^1 + B_3(x)\,dx^1\wedge dx^2 \tag{3.25}$$

と表現しておけば, 求める磁束密度は (3.14) より

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{i_2(y)(x^3-y^3) - i_3(y)(x^2-y^2)}{|x-y|^3}\,dy,\\
B_2(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{i_3(y)(x^1-y^1) - i_1(y)(x^3-y^3)}{|x-y|^3}\,dy,\\
B_3(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{i_1(y)(x^2-y^2) - i_2(y)(x^1-y^1)}{|x-y|^3}\,dy
\end{aligned} \tag{3.26}$$

となる．これを Biot-Savart の法則という．

例 3.12 (回路の周囲の磁場)**.** Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲線 C に大きさ i_0 の電流が流れていると仮定する．このとき, その回路の周囲に発生する磁束密度 B を求めてみよう．C を

$$x = f(s) \tag{3.27}$$

とパラメータ表示しておく．但し, $s \in [a, b]$ であり, C が閉曲線であるという仮定より $f(a) = f(b)$ を満たしている．このとき, (3.4) から電流密度 i は

$$\begin{aligned} i_1(x) &= i_0 \int_a^b \delta(x - f(s)) \frac{df^1}{ds}\, ds, \\ i_2(x) &= i_0 \int_a^b \delta(x - f(s)) \frac{df^2}{ds}\, ds, \\ i_3(x) &= i_0 \int_a^b \delta(x - f(s)) \frac{df^3}{ds}\, ds \end{aligned} \tag{3.28}$$

となる．但し, $f(s) = (f^1(s), f^2(s), f^3(s))$ である．Biot-Savart の法則 (3.26) を用いることにより, 磁束密度 B は

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_a^b \frac{i_0}{|x - f(s)|^3} \left\{ \frac{df^2}{ds}(x^3 - f^3(s)) - \frac{df^3}{ds}(x^2 - f^2(s)) \right\} ds, \\ B_2(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_a^b \frac{i_0}{|x - f(s)|^3} \left\{ \frac{df^3}{ds}(x^1 - f^1(s)) - \frac{df^1}{ds}(x^3 - f^3(s)) \right\} ds, \\ B_3(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_a^b \frac{i_0}{|x - f(s)|^3} \left\{ \frac{df^1}{ds}(x^2 - f^2(s)) - \frac{df^2}{ds}(x^1 - f^1(s)) \right\} ds \end{aligned} \tag{3.29}$$

となる．

例 3.13 (磁気双極子の周囲に発生する磁場)**.** 磁気双極子密度 m が

$$m = \delta(x - a) \left(m_1\, dx^1 + m_2\, dx^2 + m_3\, dx^3 \right) \tag{3.30}$$

と書けるものを定点 $a = (a^1, a^2, a^3)$ にあるモーメント (m_1, m_2, m_3) の点磁気双極子という．(3.23) より, この磁気双極子が作るベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_2(x^3 - a^3) - m_3(x^2 - a^2)}{|x - a|^3}, \\ A_2(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_3(x^1 - a^1) - m_1(x^3 - a^3)}{|x - a|^3}, \\ A_3(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1(x^2 - a^2) - m_2(x^1 - a^1)}{|x - a|^3} \end{aligned} \tag{3.31}$$

となる．

3.4 静磁場の多重極展開

電流が Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ の有界領域に流れているときのベクトルポテンシャルの振舞いについて調べてみよう．電流密度 i の台を含む原点を中心とする半径 R_0 の球体をひとつ選ぶ．このとき, (3.23) は

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l P_l\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right) i_1(y)\,dy, \\ A_2(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l P_l\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right) i_2(y)\,dy, \\ A_3(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|x|}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^l P_l\left(\frac{x\cdot y}{|x||y|}\right) i_3(y)\,dy \end{aligned} \tag{3.32}$$

と級数展開できる．この等式が意味をもつのは x が $|x| > R_0$ を満たすときである．

まず, $l = 0$ の項は常に 0 である．即ち,

$$\int_{\mathbb{R}^3} i_1(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} i_2(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} i_3(y)\,dy = 0 \tag{3.33}$$

が成り立つ．なぜなら, 電流密度の台が有界であることと電気量保存則より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} i_1(y)\,dy &= -\int_{\mathbb{R}^3} y^1\frac{\partial i_1(y)}{\partial y^1}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} y^1\left(\frac{\partial i_2(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial i_3(y)}{\partial y^3}\right)\,dy \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

となるからである．

したがって, 意味があるのは $l = 1$ から先である．$l = 1$ の項を抜き出すと

$$\begin{aligned} A_1(x) &\sim \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|x|^3}\int_{\mathbb{R}^3}(x\cdot y)i_1(y)\,dy, \\ A_2(x) &\sim \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|x|^3}\int_{\mathbb{R}^3}(x\cdot y)i_2(y)\,dy, \\ A_3(x) &\sim \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|x|^3}\int_{\mathbb{R}^3}(x\cdot y)i_3(y)\,dy \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる．これは, モーメントが

$$\begin{aligned} m_1 &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(y^2 i_3(y) - y^3 i_2(y)\right)\,dy, \\ m_2 &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(y^3 i_1(y) - y^1 i_3(y)\right)\,dy, \\ m_3 &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(y^1 i_2(y) - y^2 i_1(y)\right)\,dy \end{aligned} \tag{3.36}$$

で与えられ, 原点に位置する点磁気双極子 (3.30) により作られるベクトルポテンシャル (3.31) と一致する．

この事実を示すには,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} y^2 i_1(y)\,dy &= -\int_{\mathbb{R}^3} y^1 i_2(y)\,dy,\\ \int_{\mathbb{R}^3} y^3 i_2(y)\,dy &= -\int_{\mathbb{R}^3} y^2 i_3(y)\,dy,\\ \int_{\mathbb{R}^3} y^1 i_3(y)\,dy &= -\int_{\mathbb{R}^3} y^3 i_1(y)\,dy\end{aligned} \tag{3.37}$$

を確認すればよい. 例えば, 1 番目の等式は次のようにして確かめられる.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} y^2 i_1(y)\,dy &= -\int_{\mathbb{R}^3} y^1 y^2 \frac{\partial i_1(y)}{\partial y^1}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} y^1 y^2 \left(\frac{\partial i_2(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial i_3(y)}{\partial y^3}\right)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} y^1 y^2 \frac{\partial i_2(y)}{\partial y^2}\,dy\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} y^1 i_2(y)\,dy.\end{aligned} \tag{3.38}$$

4　電磁場

前節までは, 時間に依存しない静電場や静磁場のみを扱ってきた. この節では, 時間に依存する電荷分布や電流分布を任意に与え, そのとき周囲に発生する電磁場の時間発展を決定する問題を扱う.

まず, 時空として 4 次元 Lorentz 多様体を設定し, その多様体上で電磁場の基本方程式を与える. 次に, 時空が時間軸と空間に分離できる特別な場合を考察し, Maxwell 方程式を導く. 最後に, 空間が Euchlid 空間の場合に Maxwell 方程式を実際に解き, 遅延ポテンシャルを求める.

4.1　電磁場の基本方程式

(L, h) を向きづけられた 4 次元 Lorentz 多様体とする.

定義 4.1 (4 元電流密度)**.** L 内の 4 元電流は, L 上の 3 次微分形式 j で

$$dj = 0 \tag{4.1}$$

を満たすもので表現される. j を 4 元電流密度, (4.1) を電気量保存則という.

この j は電荷と電流の概念を一つにまとめたものである. 電荷と電流を分離するには, 時空に基準となる時間軸を指定する必要があり, それについては後で述べる.

定義 4.2 (双極子テンソル)**.** L 内の双極子は, L 上の 2 次微分形式 β により表現される. β を双極子密度テンソルという. この双極子密度テンソルは, ひとつの 4 元電流を定める. その 4 元電流密度 j は

$$j = -d\beta \tag{4.2}$$

で定義される.

双極子テンソルから定まる 4 元電流は, 電気量保存則 (4.1) を自動的に満たす. なぜなら, 外微分の性質より, $dj = -d^2\beta = 0$ となるからである.

定義 4.3 (Faraday テンソル)**.** L 内の電磁場は L 上の 2 微分形式 F および G で表現される. F および G を Faraday テンソルと呼ぶ.

電気量保存則 (4.1) を満たす 4 元電流密度 j が与えられていると仮定する. このとき, 発生する電磁場を表現する Faraday テンソル F および G は次の関係式を満たす.

$$dF = 0, \tag{4.3}$$

$$dG = j, \tag{4.4}$$

$$*_h F = \eta_0 G. \tag{4.5}$$

ここで, η_0 は真空の波動インピーダンスと呼ばれる定数で, ϵ_0 を真空の誘電率, μ_0 を真空の透磁率とするとき,

$$\eta_0 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \tag{4.6}$$

と書ける.

定義 4.4. 関係式 (4.3), (4.4) を Maxwell 方程式, (4.5) を構成方程式という.

定義 4.5 (4 元ポテンシャル)**.** Faraday テンソル F に対し, L 上の 1 次微分形式 α が存在して

$$F = d\alpha \tag{4.7}$$

と書けるとき, F は 4 元ポテンシャルを持つといい, α を 4 元ポテンシャルという.

定理 4.6. F が 4 元ポテンシャル α を持つと仮定する. もし, α が

$$d_h^* \, \alpha = 0 \tag{4.8}$$

を満たせば,

$$\Box_h \alpha = -\eta_0 *_h j \tag{4.9}$$

が成り立つ. 但し, d_h^* は計量 h から定まる余微分作用素, $\Box_h$ は h から定まる d'Alembert 作用素である.

証明. $d_h^* = - *_h d *_h$, $\Box_h = - *_h d *_h d - d *_h d *_h$ に注意し, (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) を適用すれば,

$$\begin{aligned} \Box_h \alpha &= (- *_h d *_h d - d *_h d *_h)\alpha \\ &= - *_h d *_h d\alpha \\ &= - *_h d *_h F \\ &= -\eta_0 *_h dG \\ &= -\eta_0 *_h j. \end{aligned} \tag{4.10}$$

□

定義 4.7. (4.8) を Lorentz 条件, (4.9) を波動方程式という.

定理 4.8. 電気量保存則 (4.1) を満たす 4 元電流密度 j が与えられ, L 上の 1 次微分形式 α が Lorentz 条件 (4.8) および波動方程式 (4.9) を満たすと仮定する. このとき, Faraday テンソル F を (4.7) で定め, G を (4.5) で定義すれば, F, G は残りの基本方程式 (4.3) と (4.4) を満たす.

証明. (4.3) は外微分の性質より $dF = d^2\alpha = 0$ となり, ただちに従う. (4.4) を示すには, 定理 4.6 の証明を逆にたどっていけばよい. □

したがって, 電磁場の時間発展問題は Lorentz 条件 (4.8) および波動方程式 (4.9) を解く問題に帰着される.

4.2 時間と空間の分離

時空 L が空間 M と時間軸 $\mathbb{R}$ に分離できる場合を考え, 電磁場の基本方程式を書き換えてみよう. M を向きづけられた 3 次元 Riemann 多様体, g をその Riemann 計量とする. 今, $L := \mathbb{R} \times M$ とおき, M の局所座標を $x = (x^1, x^2, x^3)$, 時間を表す $\mathbb{R}$ の座標を t で表せば, L の局所座標として (t, x) が入る. ここで L 上の計量 h を

$$h := c^2 dt^2 - g \tag{4.11}$$

で定める. 但し, c は光速であり, 真空の誘電率 ϵ_0 および 真空の透磁率 μ_0 を用いて

$$c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{4.12}$$

と書ける．すると h は Lorentz 計量の条件を満たすから, (L, h) は Lorentz 多様体になる．また, L には次のようにして向きを定める．x を M の正の局所座標としたとき, (t, x) が L の正の局所座標となるように向きを決めればよい.

以下, 時空 L は上記のものと仮定する．j を L 内の 4 元電流密度とする．このとき, j は次の形に一意的に書くことができる.

$$
\begin{aligned}
j &= -dt \wedge i + \rho, \\
i &= i_1(t,x)\,dx^2 \wedge dx^3 + i_2(t,x)\,dx^3 \wedge dx^1 + i_3(t,x)\,dx^1 \wedge dx^2, \\
\rho &= \rho_0(t,x)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

但し, i は時間変数 t をパラメータに持つ M 上の 2 次微分形式, 同じく ρ はパラメータ t を持つ M 上の 3 次微分形式である.

定義 4.9. i を電流密度, ρ を電荷密度という.

電気量保存則 (4.1) は i と ρ を使って, 次のように書ける.

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + di = 0. \tag{4.14}
$$

但し, d は M 上の外微分作用素である.

F, G を L 内の Faraday テンソルとする．このとき, F は次の形に書ける.

$$
\begin{aligned}
F &= -dt \wedge E + B, \\
E &= E_1(t,x)\,dx^1 + E_2(t,x)\,dx^2 + E_3(t,x)\,dx^3, \\
B &= B_1(t,x)\,dx^2 \wedge dx^3 + B_2(t,x)\,dx^3 \wedge dx^1 + B_3(t,x)\,dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

但し, E はパラメータ t を持つ M 上の 1 次微分形式, B はパラメータ t を持つ M 上の 2 次微分形式である.

定義 4.10. E を電場, B を磁束密度という.

同様に, G は

$$
\begin{aligned}
G &= dt \wedge H + D, \\
H &= H_1(t,x)\,dx^1 + H_2(t,x)\,dx^2 + H_3(t,x)\,dx^3, \\
D &= D_1(t,x)\,dx^2 \wedge dx^3 + D_2(t,x)\,dx^3 \wedge dx^1 + D_3(t,x)\,dx^1 \wedge dx^2
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

と書ける．但し, H はパラメータ t を持つ M 上の 1 次微分形式, D はパラメータ t を持つ M 上の 2 次微分形式である.

定義 4.11. H を磁場, D を電束密度という.

以上で電磁気現象に現れる基本的な物理量, 電荷密度 ρ, 電流密度 i, 電場 E, 磁束密度 B, 磁場 H, 電束密度 D が定義できた.

これらを使って, 電磁場の基本方程式を書き直してみよう．まず, (4.3) は次と同値である.

$$
dB = 0, \tag{4.17}
$$

$$
dE + \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \tag{4.18}
$$

そして, (4.4) は

$$dD = \rho, \tag{4.19}$$

$$dH - \frac{\partial D}{\partial t} = i \tag{4.20}$$

と同値である. さらに, (4.5) は

$$\frac{1}{c} *_g E = \eta_0 D, \tag{4.21}$$

$$c *_g B = \eta_0 H \tag{4.22}$$

と同値である.

定義 4.12. 方程式 (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) を Maxwell 方程式, (4.21), (4.22) を構成方程式という.

したがって, 電磁場の時間発展を記述する方程式は Maxwell 方程式 (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), 構成方程式 (4.21), (4.22) にまとめられる.

定理 4.13. S を M 内の曲面とする.

(i) ∂S に沿う起電力と S に沿う磁束との間には, 次の関係が成り立つ.

$$\int_{\partial S} E + \frac{\partial}{\partial t}\int_S B = 0 \tag{4.23}$$

これを Faraday の電磁誘導の法則という.

(ii) ∂S に沿う起磁力, S に沿う電束, S を通過する電流との間には, 次の関係が成り立つ.

$$\int_{\partial S} H - \frac{\partial}{\partial t}\int_S D = \int_S i \tag{4.24}$$

これを一般化された Ampère の法則という.

この定理の証明は (4.18) と (4.20) から直ちに得られる.

Faraday テンソル F が 4 元ポテンシャル α を持つと仮定する. このとき, α は

$$\begin{aligned} &\alpha = -dt \wedge \phi(t,x) + A, \\ &A = A_1(t,x)\,dx^1 + A_2(t,x)\,dx^2 + A_3(t,x)\,dx^3 \end{aligned} \tag{4.25}$$

と一意的に書くことができる. 但し, ϕ はパラメータ t を持つ M 上の関数, A はパラメータ t を持つ M 上の 1 次微分形式である.

定義 4.14. ϕ をスカラーポテンシャル, A をベクトルポテンシャルという.

すると, 関係 (4.7) は

$$E = -d\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{4.26}$$

$$B = dA \tag{4.27}$$

と分解できる. Lorentz 条件 (4.8) は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + d_g^* A = 0 \tag{4.28}$$

と同値である. 波動方程式 (4.9) は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \triangle_g \phi = c\eta_0 *_g \rho, \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \triangle_g A = \frac{\eta_0}{c} *_g i \tag{4.30}$$

と書ける. 但し, $\triangle_g$ は M 上の Laplace 作用素である.

例 4.15. 双極子密度テンソル β は

$$\begin{aligned}\beta &= -dt \wedge m + p,\\ m &= m_1(t,x)\,dx^1 + m_2(t,x)\,dx^2 + m_3(t,x)\,dx^3,\\ p &= p_1(t,x)\,dx^2 \wedge dx^3 + p_2(t,x)\,dx^3 \wedge dx^1 + p_3(t,x)\,dx^1 \wedge dx^2\end{aligned} \tag{4.31}$$

と書くことができる. 但し, p はパラメータ t を持つ M 上の 2 次微分形式で, m はパラメータ t を持つ M 上の 1 次微分形式である. p を電気双極子密度, m を磁気双極子密度と呼ぶ. このとき, (4.2) は

$$\begin{aligned} i &= \frac{\partial p}{\partial t} + dm,\\ \rho &= -dp \end{aligned} \tag{4.32}$$

と書き換えられる.

定理 4.16 (エネルギー等式)**.** (4.17) から (4.22) の式を仮定すると, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E \wedge D + H \wedge B) + d(E \wedge H) = -E \wedge i. \tag{4.33}$$

証明. (4.21) と命題 1.5 より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} \wedge H &= \mu_0 \left(*_g \frac{\partial H}{\partial t} \right) \wedge H\\ &= \mu_0 (*_g H) \wedge \frac{\partial H}{\partial t}\\ &= B \wedge \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned} \tag{4.34}$$

が成り立つ. 同様に

$$\frac{\partial E}{\partial t} \wedge D = E \wedge \frac{\partial D}{\partial t} \tag{4.35}$$

も示すことができる. 従って, (4.18) と (4.20) より

$$\begin{aligned} d(E \wedge H) &= dE \wedge H - E \wedge dH\\ &= -\frac{\partial B}{\partial t} \wedge H - E \wedge \left(\frac{\partial D}{\partial t} + i \right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E \wedge D + H \wedge B) - E \wedge i \end{aligned} \tag{4.36}$$

となり, 求める等式を得る. □

定義 4.17. エネルギー等式 (4.33) の左辺に現れる項

$$\frac{1}{2}(E \wedge D + H \wedge B) \tag{4.37}$$

を電磁エネルギー密度という. また, M 内の領域 V に対し,

$$\int_V \frac{1}{2}\left(E \wedge D + H \wedge B\right) \tag{4.38}$$

を V 内の電磁エネルギー,

$$\int_V E \wedge i \tag{4.39}$$

を V 内の Joule 熱という.

定義 4.18. エネルギー等式 (4.33) の右辺に現れる項

$$E \wedge H \tag{4.40}$$

を Poynting ベクトルと呼ぶ. S を M 内の曲面とするとき,

$$\int_S E \wedge H \tag{4.41}$$

を S 通過する単位時間あたりのエネルギーという.

定理 4.19. V を M 内の領域とするとき, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left(E \wedge D + H \wedge B\right) + \int_{\partial V} E \wedge H = -\int_V E \wedge i. \tag{4.42}$$

4.3 遅延ポテンシャル

空間 M を Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3$ として, 波動方程式 (4.28), (4.29), (4.30) を解いてみよう. 時間変数を t, 空間変数を $x = (x^1, x^2, x^3)$ とすると, 時空 $L := \mathbb{R} \times M$ の計量 h は

$$h = c^2\, dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{4.43}$$

と書ける. 電荷密度 ρ を

$$\rho = \rho_0(t, x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{4.44}$$

電流密度 i を

$$i = i_1(t, x)\, dx^2 \wedge dx^3 + i_2(t, x)\, dx^3 \wedge dx^1 + i_3(t, x)\, dx^1 \wedge dx^2 \tag{4.45}$$

と表示しておくと, 電気量保存則 (4.14) は

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial i_1}{\partial x^1} + \frac{\partial i_2}{\partial x^2} + \frac{\partial i_3}{\partial x^3} = 0 \tag{4.46}$$

と書ける. また, スカラーポテンシャルを $\phi(t, x)$, ベクトルポテンシャル A を

$$A = A_1(t, x)\, dx^1 + A_2(t, x)\, dx^2 + A_3(t, x)\, dx^3 \tag{4.47}$$

と表示しておけば, Lorentz 条件 (4.28) は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0 \tag{4.48}$$

と同値である. 波動方程式 (4.29), (4.30) は

$$
\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}\phi(t,x)&=\frac{\rho_0(t,x)}{\epsilon_0},\\
\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_1(t,x)&=\mu_0 i_1(t,x),\\
\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_2(t,x)&=\mu_0 i_2(t,x),\\
\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}A_3(t,x)&=\mu_0 i_3(t,x)
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

と書ける. 但し, $\epsilon_0=(c\eta_0)^{-1}$, $\mu_0=\eta_0/c$ を使った.

4 つの方程式 (4.49) を実際に解いてみよう. その前に, 次の方程式を解くことを考える.

$$
\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\right\}K(t,x)=\delta(t)\delta(x). \tag{4.50}
$$

この両辺を変数 x に関して Fourier 変換すると

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+|\xi|^2\right)\hat{K}(t,\xi)=\frac{\delta(t)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{4.51}
$$

となる. ここで,

$$
\hat{K}(t,\xi):=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{cY(t)\sin(c|\xi|t)}{|\xi|} \tag{4.52}
$$

とおくと, これは (4.51) の解である. 但し, $Y(t)$ は Heaviside 関数である. 実際,

$$
\frac{\partial\hat{K}}{\partial t}=\frac{c^2}{(2\pi)^{3/2}}Y(t)\cos(c|\xi|t), \tag{4.53}
$$

$$
\frac{\partial^2\hat{K}}{\partial t^2}=\frac{c^2\delta(t)}{(2\pi)^{3/2}}-\frac{c^2|\xi|^2}{(2\pi)^{3/2}}\frac{cY(t)\sin(c|\xi|t)}{|\xi|} \tag{4.54}
$$

となるからである. (4.52) を変数 ξ に関して Fourier 逆変換を行えば,

$$
\begin{aligned}
K(t,x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{cY(t)\sin\left(c|\xi|t\right)}{|\xi|}\exp(-j\xi\cdot x)\,d\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dr\int_{-1}^1 dw\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{cY(t)\sin(crt)}{r}\exp(-jrw|x|)r^2\\
&=\frac{c}{2\pi^2|x|}Y(t)\int_0^\infty\sin(crt)\sin(r|x|)\,dr\\
&=\frac{c}{8\pi^2|x|}Y(t)\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\left\{\cos((ct-|x|)r)-\cos((ct+|x|)r)\right\}dr\\
&=\frac{c}{4\pi|x|}Y(t)\left\{\delta(ct-|x|)-\delta(ct+|x|)\right\}\\
&=\frac{1}{4\pi|x|}\delta\left(t-\frac{|x|}{c}\right)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

となり, 方程式 (4.50) の解を得る．但し, 2 番目の等式で (2.24) と同じ座標変換を, 5 番目の等式で公式

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\cos(a\theta)\,d\theta = 2\pi\delta(a) \tag{4.56}$$

を用いた．

畳み込み積を計算すれば, スカラーポテンシャル

$$\begin{aligned}\phi(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{\mathbb{R}^3}dy\,K(t-\tau,x-y)\frac{\rho_0(\tau,y)}{\epsilon_0}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{\mathbb{R}^3}dy\,\frac{1}{4\pi|x-y|}\delta\left((t-\tau)-\frac{|x-y|}{c}\right)\frac{\rho_0(\tau,y)}{\epsilon_0}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\rho_0\left(t-\frac{|x-y|}{c},y\right)dy\end{aligned} \tag{4.57}$$

が求まる．ベクトルポテンシャルについても同様に計算し, (4.49) の解

$$\begin{aligned}\phi(t,x) =&\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\rho_0\left(t-\frac{|x-y|}{c},y\right)dy,\\ A_1(t,x) =&\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}i_1\left(t-\frac{|x-y|}{c},y\right)dy,\\ A_2(t,x) =&\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}i_2\left(t-\frac{|x-y|}{c},y\right)dy,\\ A_3(t,x) =&\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}i_3\left(t-\frac{|x-y|}{c},y\right)dy\end{aligned} \tag{4.58}$$

を得る．最後に, (4.58) が Lorentz 条件 (4.48) を満たすことを確認しよう．まず, スカラーポテンシャルについて

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\left.\frac{\partial\rho_0(\tau,y)}{\partial\tau}\right|_{\tau=t-|x-y|/c}dy \tag{4.59}$$

が成り立つ．さらに, ベクトルポテンシャルについて

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial x^1} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\left.\frac{\partial i_1(\tau,y)}{\partial y^1}\right|_{\tau=t-|x-y|/c}dy,\\ \frac{\partial A_2}{\partial x^2} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\left.\frac{\partial i_2(\tau,y)}{\partial y^2}\right|_{\tau=t-|x-y|/c}dy,\\ \frac{\partial A_3}{\partial x^3} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}\left.\frac{\partial i_3(\tau,y)}{\partial y^3}\right|_{\tau=t-|x-y|/c}dy\end{aligned} \tag{4.60}$$

が成り立つ．なぜなら, 変数 y と z に関する変数変換 $z=y-x$ を行い,

$$A_1(t,x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|z|}i_1\left(t-\frac{|z|}{c},z+x\right)dz \tag{4.61}$$

と書き直せば,

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|z|}\left.\frac{\partial i_1(\tau,y)}{\partial y^1}\right|_{\substack{\tau=t-|z|/c\\ y=x+z}}dz \tag{4.62}$$

となる．再び, 変数 z を y に戻せば (4.60) を得る．Lorentz 条件 (4.48) は電気量保存則 (4.46) と等式 (4.59), (4.60) から得られる．

定義 4.20. 解 (4.58) を遅延ポテンシャルという．

4.4 Liénard-Wiechert ポテンシャル

電気量 Q の点電荷が世界線 $x = f(t)$ に沿って運動するとき, その周囲に発生する電磁場を求めてみよう. 点電荷は光速より遅く運動するものとする. 即ち, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, $|f'(t)| < c$ と仮定する. この電荷密度 ρ と電流密度 i は

$$\begin{aligned} \rho_0(t,x) &= Q\delta(x - f(t)), \\ i_1(t,x) &= Qf_1'(t)\delta(x - f(t)), \\ i_2(t,x) &= Qf_2'(t)\delta(x - f(t)), \\ i_3(t,x) &= Qf_3'(t)\delta(x - f(t)) \end{aligned} \tag{4.63}$$

で与えられる. (4.58) に代入して, 遅延ポテンシャルを求めよう. まず, スカラーポテンシャルは

$$\phi(t,x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} Q\delta\left(y - f\left(t - \frac{|x-y|}{c}\right)\right) dy \tag{4.64}$$

となる. この積分を計算するために, y から z への座標変換

$$z = y - x - f\left(t - \frac{|x-y|}{c}\right) \tag{4.65}$$

を考える. 逆写像は $y = y(z;t)$ と書くことにする.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - c^{-1}|x-y|^{-1} f'\left(t - \frac{|x-y|}{c}\right) \cdot (x-y) \tag{4.66}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \phi(t,x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\{y - x - f(t - |x-y|/c)\,:\,y \in \mathbb{R}^3\}} \frac{1}{|x - y(z;t)|} Q\delta(z+x)\frac{\partial y}{\partial z}\, dz & (4.67) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|x - y(-x;t)| - c^{-1} f'\left(t - \frac{|x-y(-x;t)|}{c}\right) \cdot (x - y(-x;t))} & (4.68) \end{aligned}$$

となる.

さらに, 等式

$$t - T(t,x) = \frac{|x - f(T(t,x))|}{c} \tag{4.69}$$

を満たすような陰関数 $T(t,x)$ をとる. (t,x) が条件 $|x - f(0)| < ct$ を満たせば $T(t,x)$ は一意に存在する. すると,

$$y(-x;t) = f(T(t,x)) \tag{4.70}$$

が成り立つので, スカラーポテンシャルは

$$\phi(t,x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|x - f(T(t,x))| - c^{-1} f'(T(t,x)) \cdot (x - f(T(t,x)))} \tag{4.71}$$

と表現することもできる.

ベクトルポテンシャルについても同様に計算でき, 結果は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\phi(t,x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|x-f(T(t,x))|-c^{-1}f'(T(t,x))\cdot(x-f(T(t,x)))},\\
A_1(t,x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qf_1'(T(t,x))}{|x-f(T(t,x))|-c^{-1}f'(T(t,x))\cdot(x-f(T(t,x)))},\\
A_2(t,x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qf_2'(T(t,x))}{|x-f(T(t,x))|-c^{-1}f'(T(t,x))\cdot(x-f(T(t,x)))},\\
A_3(t,x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qf_3'(T(t,x))}{|x-f(T(t,x))|-c^{-1}f'(T(t,x))\cdot(x-f(T(t,x)))}.
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

このポテンシャルを Liénard-Wiechert ポテンシャルと呼ぶ.

5 導体

この節では, 導体がもつ性質として, 静電誘導と Ohm の法則について述べる.

静電誘導とは, 金属等の導体内部の自由電子の存在により, 導体表面の電位差が常に 0 に保たれる現象のことをいい, 導体の重要な性質の一つである. この節の前半では, 真空中に固定された導体と電荷の分布を任意に与え, 発生する静電場と導体表面の電荷分布を求める問題を扱う.

導体のもう一つの重要な性質は, 導体内部に電場があると, それに比例して電流が流れる現象である. これを Ohm の法則という. この節の後半では, 導体表面の電位を任意に与え, そのとき導体内部に発生する静電場と定常電流を求める問題を扱う.

どちらの問題も, 数学的には偏微分方程式の境界値問題に帰着され, このノートでは Green 関数を用いた解法を紹介する. 境界値問題の詳細な解説書として, 谷島 [6] を挙げておく.

5.1 静電誘導

(M, g) を 3 次元 Riemann 多様体とする. 真空中に固定された導体は, M の中の滑らかな境界をもつ領域 X により表現される. X の境界 ∂X を導体の表面という. また, $M \setminus X$ を導体の周囲という.

導体の周囲に電荷が与えられていると仮定し, その電荷密度を $M \setminus X$ 上で定義された 3 次微分形式 ρ で表すことにする. このとき, 導体の周囲に発生する静電場の状態は, $M \setminus X$ 上定義されたスカラーポテンシャル ϕ で表現され, Poisson 方程式

$$\triangle_g \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} *_g \rho \tag{5.1}$$

を満たす. さらに, 導体が接地されているとすれば

$$\phi \circ \iota = 0 \tag{5.2}$$

が成立する. 但し, $\iota : \partial X \to M$ は埋め込み写像である.

定義 5.1. (5.2) を境界条件という.

電場 E は (2.12) から, 電束密度 D は (2.5) から求められる. 導体表面の電荷密度は電束密度 D の ι による引き戻し $\iota^* D$ であり, 導体に帯びている電荷の総電気量は

$$\int_{\partial X} \iota^* D \tag{5.3}$$

で計算できる.

例 5.2 (接地された導体周囲の電場)**.** Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x^1, x^2, x^3)\}$ の半空間 $X := \{(x^1, x^2, x^3) : x^3 < 0\}$ を導体が占めており, その導体は接地されているものとする. また, 導体の周囲 $\mathbb{R}^3 \setminus X$ には電荷密度

$$\rho = \rho_0(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{5.4}$$

で表される電荷が分布しているものとする. このときの導体周囲の電場と導体表面の電荷分布を求めよう.

スカラーポテンシャルを ϕ とすれば Poisson 方程式 (5.1) は

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2 \right\} \phi(x) = -\frac{\rho_0(x)}{\epsilon_0} \tag{5.5}$$

となる. また, 境界条件 (5.2) は

$$\phi(x^1, x^2, 0) = 0 \tag{5.6}$$

と書ける. これは, 境界条件 (5.6) の条件の下で, Poisson 方程式 (5.5) を解く Dirichlet 問題である.

実際に, この微分方程式を解いてみよう. $x = (x^1, x^2, x^3)$ の ∂X に対する鏡像を x^* とおく. 即ち,

$$x^* := (x^1, x^2, -x^3) \tag{5.7}$$

とおく. そして, 関数

$$G(x; y) := -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|y - x|} - \frac{1}{|y - x^*|} \right\} \tag{5.8}$$

を考える. すると,

$$\triangle_y G(x; y) = \delta(y - x) - \delta(y - x^*) \tag{5.9}$$

が成り立つ. 特に, $x^3 > 0$, $y^3 > 0$ ならば

$$\triangle_y G(x; y) = \delta(y - x) \tag{5.10}$$

である. さらに

$$G(x; y)\big|_{y^3=0} = 0 \tag{5.11}$$

も言える. したがって, $G(x; y)$ はこの Dirichlet 問題の Green 関数である. ゆえに,

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= -\int_{\{y \in \mathbb{R}^3 : y^3 > 0\}} G(x; y) \frac{\rho_0(y)}{\epsilon_0} \, dy \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^3 : y^3 > 0\}} \left\{ \frac{1}{|y - x|} - \frac{1}{|y - x^*|} \right\} \rho_0(y) \, dy \end{aligned} \tag{5.12}$$

は (5.5) および (5.6) を満たす. これが求めるスカラーポテンシャルである.

また, 導体表面の電荷密度を計算すると

$$\begin{aligned} \iota^* D &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right|_{x^3=0} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \epsilon_0 \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^3 : y^3 > 0\}} \left. \frac{\partial G(x; y)}{\partial x^3} \right|_{x^3=0} \frac{\rho_0(y)}{\epsilon_0} \, dy \right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\{y \in \mathbb{R}^3 : y^3 > 0\}} \frac{y^3 \rho_0(y) \, dy}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (y^3)^2}} \, dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \tag{5.13}$$

となる.

5.2　Ohm の法則

(M, g) を 3 次元 Riemann 多様体とし, M は導体で占められていると仮定する. M の境界 ∂M を導体の表面という. 導体の表面は絶縁されている部分 N_1 および電源電極に接続されている部分 N_2 に分けられるものとする. 即ち, $\partial M = N_1 \sqcup N_2$ である. 定電圧電源の電位分布は, N_2 上の関数 ϕ_{ext} で与えられているとする.

このとき, 導体内部の状態はスカラーポテンシャルと呼ばれる M 上の関数 ϕ, 電場と呼ばれる 1 次微分形式 E, 電流密度と呼ばれる 2 次微分形式 i により表現され, 次の性質を満たす.

(i) 電気量保存則

$$di = 0 \tag{5.14}$$

およびスカラーポテンシャルと電場の関係式

$$E = -d\phi \tag{5.15}$$

が成り立つ.

(ii) 導体表面 N_1 は絶縁されている. 即ち,

$$\iota_1^* i = 0 \tag{5.16}$$

を満たす.

(iii) 導体表面 N_2 で電極に接続されている. 即ち,

$$\iota_2^* \phi = \phi_{\mathrm{ext}} \tag{5.17}$$

を満たす.

条件 (5.16) および (5.17) を境界条件と呼ぶ. 電位や電流分布が決まるには, 今述べた条件だけでは不十分で, さらに導体の性質を指定しなければならない. ここでは, 次の性質をもつ導体を考える.

定義 5.3. 導体 M が Ohm 導体であるとは, 導電率と呼ばれる M 上の関数 σ により,

$$\sigma *_g E = i \tag{5.18}$$

と書けるときをいう. (5.18) を Ohm の法則という.

まとめると, 電位や電流分布を求める問題は, 電気量保存則 (5.14), スカラーポテンシャルと電場の関係 (5.15), 境界条件 (5.16) および (5.17), Ohm の法則 (5.18) により決定される.

導電率 σ が定数関数のとき, 導体は均質であるという. 導体が均質な場合, $\triangle_g \phi$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \triangle_g \phi &= *_g d *_g d\phi \\ &= - *_g d *_g E \\ &= -\frac{1}{\sigma} *_g di \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

となる．即ち, 方程式 (5.14), (5.15), (5.18) は Laplace 方程式

$$\triangle_g \phi = 0 \tag{5.20}$$

の形にまとめられ, 境界条件 (5.16) は

$$\iota_1^* *_g d\phi = 0 \tag{5.21}$$

と書ける．したがって, 方程式は (5.20) および境界条件 (5.17) と (5.21) にまとめられ, スカラーポテンシャル ϕ のみの方程式となる．電場を得たいなら (5.15) を, 電流密度を得たいなら (5.18) を用いればよい.

例 5.4 (導体球内部に流れる定常電流)**.** Euchlid 空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x^1, x^2, x^3)\}$ 内に半径 R の Ohm 導体球 $X := \{|x| < R\}$ があり, その導体球は均質とする．導体球の表面 ∂X は電圧分布 ϕ_{ext} で表される定電圧電極と接しているものとする．このとき流れる導体球内部の電位を求めよう.

求めるスカラーポテンシャルを ϕ とすれば, Laplace 方程式 (5.20) を満たす．座標で具体的に表示すると

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2 \right\} \phi(x) = 0 \tag{5.22}$$

となる．電極に接続されている状態を表す条件 (5.17) は

$$\phi\big|_{\partial X} = \phi_{\mathrm{ext}} \tag{5.23}$$

となる．これは, 境界条件 (5.23) の下で Laplace 方程式 (5.22) を解く Dirichlet 問題となる.

これを実際に解いてみよう．$x \in X$ の ∂X に関する鏡像を x^* とする．即ち, $x^* = R^2 x/|x|^2$ である．そして, $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_y$ 上の関数

$$G(x; y) := -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|y - x|} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{|y - x^*|} \right\} \tag{5.24}$$

を考える．すると,

$$\triangle_y G(x; y) = \delta(y - x) - \frac{R}{|x|} \delta(y - x^*) \tag{5.25}$$

が成り立つ．特に, $|x| < R$, $|y| < R$ ならば

$$\triangle_y G(x; y) = \delta(y - x) \tag{5.26}$$

である．また,

$$G(x; y)\big|_{|y|=R} = 0 \tag{5.27}$$

を満たしている．したがって $G(x; y)$ は考えている Dirichlet 問題の Green 関数となる．したがって, 求めるスカラーポテンシャルは

$$\phi(x) = \int_{\partial X} \phi_{\mathrm{ext}} \wedge \iota^* * dG(x; \cdot) \tag{5.28}$$

となる．但し, $*$ は Euchlid 計量に基づく Hodge の星作用素, $\iota : \partial X \to \mathbb{R}^3$ は標準的な埋め込み写像, ι^* は ι から誘導される余接バンドルの引き戻し写像である.

(5.28) を座標で具体的に表現するため, 直交座標と極座標の変換式

$$\begin{aligned}
x^1 &= r\cos\theta, \\
x^2 &= r\sin\theta\cos\varphi, \\
x^3 &= r\sin\theta\sin\varphi
\end{aligned} \tag{5.29}$$

を用いて, Green 関数 (5.24) を直交座標表示から極座標表示へ書き換えよう. $x = (x^1, x^2, x^3)$ の極座標表示を (r, θ, φ), $y = (y^1, y^2, y^3)$ の極座標表示を (r', θ', φ') とおくと,

$$\begin{aligned}
G(r,\theta,\varphi; r',\theta',\varphi') = &-\frac{1}{4\pi\sqrt{(r')^2 - 2r'r\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\} + r^2}} \\
&+ \frac{R}{4\pi\sqrt{r^2(r')^2 - 2rr'R^2\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\} + R^4}}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

とかける. したがって, (5.28) は

$$\begin{aligned}
\phi(r,\theta,\varphi) &= \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\, \phi_{\mathrm{ext}}(\theta',\varphi') R^2 \left.\frac{\partial G(r,\theta,\varphi; r',\theta',\varphi')}{\partial r'}\right|_{r'=R} \sin\theta' \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\, \phi_{\mathrm{ext}}(\theta',\varphi') \frac{R(R^2 - r^2)\sin\theta'}{[R^2 - 2Rr\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\} + r^2]^{3/2}}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

となる.

参考文献

[1] N. N. Lebedev, Special Functions and Their Applications, Translated and edited by Richard A. Silverman, Dover, New York, 1972.

[2] M. Spivak, Comprehensive Introduction to Differential Geometry 5 Volumes (3rd Edition), Publish or Perish, 1999.

[3] 砂田 利一, 数学から見た連続体の力学と相対論, 岩波講座 物理の世界, 岩波書店, 2004.

[4] 砂川 重信, 理論電磁気学 第 3 版, 紀伊國屋書店, 1999.

[5] 和達 三樹, 微分・位相幾何, 理工系の基礎数学, 岩波書店, 1996.

[6] 谷島 賢二, 基礎数学 物理数学入門, 東京大学出版会, 1994.