微分幾何学の初歩の初歩

Palais Blanc

2024 年 10 月 29 日

目次

1　リーマン計量の初歩

1.1　直交座標と極座標

直交座標は、縦 x 横 y 高さ z で三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の点の位置 (x, y, z) を表します。極座標は、原点からの距離 r 経度 θ 緯度 ϕ の三つの情報 (r, ϕ, θ) でユークリッド空間の位置を表します。ただし、$r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ とします。直交座標と極座標の間には、次の関係

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\cos\theta, \\ y &= r\cos\phi\sin\theta, \\ z &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{1.1}$$

があります。式 (1.1) は、座標変換と呼ばれます。

三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ はリーマン多様体であり、そのリーマン計量 $g_{\mathbb{R}^3}$ は

$$g_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.2}$$

と表されます。

リーマン計量 $g_{\mathbb{R}^3}$ を極座標で表してみましょう。座標変換 (1.1) の全微分

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta \end{aligned} \tag{1.3}$$

を式 (1.2) に代入します。すると、

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}^3} &= (\cos\phi\cos\theta\,dr - r\sin\phi\cos\theta\,d\phi - r\cos\phi\sin\theta\,d\theta)^2 \\ &\quad + (\cos\phi\sin\theta\,dr - r\sin\phi\sin\theta\,d\phi + r\cos\phi\cos\theta\,d\theta)^2 \\ &\quad + (\sin\phi\,dr + r\cos\phi\,d\phi)^2 \\ &= dr^2 + r^2\,d\phi^2 + r^2\cos^2\phi\,d\theta^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

となり、極座標で表すことができました。

1.2　球面のリーマン計量

R を定数 $(R > 0)$ とするとき, 半径 R の球面 S^2_R は、局所座標 (ϕ, θ) をもつ多様体です。S^2_R は式

$$\begin{aligned} x &= R\cos\phi\cos\theta, \\ y &= R\cos\phi\sin\theta, \\ z &= R\sin\phi \end{aligned} \tag{1.5}$$

によって、三次元ユークリッド空間に埋め込まれているので、$g_{\mathbb{R}^3}$ から S_R^2 に自然なリーマン計量の構造を入れることが出来ます。それを計算してみましょう。式 (1.5) の全微分

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta, \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

を式 (1.2) に代入すると

$$
\begin{aligned}
g_{S_R^2} =& (-R \sin\phi \cos\theta \, d\phi - R \cos\phi \sin\theta \, d\theta)^2 \\
&+ (-R \sin\phi \sin\theta \, d\phi + R \cos\phi \cos\theta \, d\theta)^2 \\
&+ (R \cos\phi \, d\phi)^2 \\
=& R^2 \, d\phi^2 + R^2 \cos^2\phi \, d\theta^2
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

となり、半径 R の球面 S_R^2 のリーマン計量 $g_{S_R^2}$ が求められました。局所座標 (ϕ, θ) の変数の範囲は $0 < \theta < 2\pi$ かつ $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ です。

1.3　球面の面積

一般のリーマン多様体 (M, g) の体積は次のように定義されています。局所座標 $(x^1, \ldots, x^m)$ によって

$$
g = \sum_{ij} g_{ij} \, dx^i \, dx^j \tag{1.8}
$$

(ただし、正方行列 $(g_{ij})_{ij}$ は正値で対称な行列) と表示したとき、体積要素

$$
V_M = \sqrt{\det(g_{ij})_{ij}} \, dx^1 \cdots dx^m \tag{1.9}
$$

を M 上で積分することによって得られます。

これを利用して、球面 S_R^2 の面積を計算してみましょう。S_R^2 のリーマン計量は、(1.7) で求められたので、S_R^2 の体積要素は、(1.9) より

$$
\begin{aligned}
V_{S_R^2} &= \sqrt{\begin{vmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{vmatrix}} \, d\phi \, d\theta \\
&= \sqrt{\begin{vmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2\phi \end{vmatrix}} \, d\phi \, d\theta \\
&= R^2 \cos\phi \, d\phi \, d\theta
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

となります。S_R^2 上で積分すると、

$$
\begin{aligned}
\int_{S_R^2} V_{S_R^2} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\phi \, d\phi \\
&= 4\pi R^2
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

となり、半径 R の球面の面積が求められました。

1.4　面積の正しい地図

面積の正しい地図を作るには、どのような座標 (u, v) を選んだら良いか考えてみます。ここでは、経度は $\theta = v$ とし、緯度が未知関数 f を選んで $\phi = f(u)$ となるような f を見つけることにします。即ち、座標 (ϕ, θ) と (u, v) の関係が

$$\begin{aligned} \phi &= f(u), \\ \theta &= v \end{aligned} \tag{1.12}$$

になると仮定します。リーマン計量 $g_{S_R^2}$ を (u, v) で表してみましょう. (1.7) に、(1.12) の全微分

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv, \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial u} du + \frac{\partial \theta}{\partial v} dv \end{aligned} \tag{1.13}$$

を代入すると、

$$g_{S_R^2} = R^2 f'(u)^2 \, du^2 + R^2 \cos^2 f(u) \, dv^2 \tag{1.14}$$

となります。さらに体積要素を (u, v) で表すと

$$V_{S_R^2} = R^2 f'(u) \cos f(u) \, du \, dv \tag{1.15}$$

となります。したがって、面積が正しい地図であるためには、

$$f'(u) \cos f(u) = C \tag{1.16}$$

でなければなりません。C は定数です。式 (1.16) は変数分離形の微分方程式なので、解くと

$$\sin f(u) = Cu + D \tag{1.17}$$

となります。定数は簡単のため、$C = 1$ かつ $D = 0$ と仮定することにします。すると、

$$f(u) = \arcsin u \tag{1.18}$$

を得ます。よって、(ϕ, θ) と (u, v) の座標変換は

$$\begin{aligned} u &= \sin \phi, \\ v &= \theta \end{aligned} \tag{1.19}$$

で、リーマン計量と体積要素は、

$$g_{S_R^2} = \frac{R^2}{1 - u^2} \, du^2 + R^2 (1 - u^2) \, dv^2 \tag{1.20}$$

$$V_{S_R^2} = R^2 \, du \, dv \tag{1.21}$$

となります。ただし、u と v の範囲はそれぞれ、$-1 < u < 1$, $0 < v < 2\pi$ です。

1.5　角度の正しい地図

角度の正しい地図を作るには、どのような座標 (u, v) を選んだら良いか考えてみます。ここでは、前回と同様、経度は $\theta = v$ とし、緯度が未知関数 f を選んで $\phi = f(u)$ となるような f を見つけることにします。即ち、座標 (ϕ, θ) と (u, v) の関係が

$$\begin{aligned} \phi &= f(u), \\ \theta &= v \end{aligned} \tag{1.22}$$

になると仮定します。リーマン計量を (u, v) で表すと (1.7) より

$$g_{S_R^2} = R^2 f'(u)^2 \, du^2 + R^2 \cos^2 f(u) \, dv^2 \tag{1.23}$$

となります。$g_{S_R^2}$ の形から、角度が正しい地図であるためには

$$f'(u) = \cos f(u) \tag{1.24}$$

となれば十分です。これは変数分離形の微分方程式なので、解くと

$$\log \left| \tan \left(\frac{f(u)}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = u + C \tag{1.25}$$

となります。但し、C は積分定数。ここでは $C = 0$ と仮定して計算を進めると、(ϕ, θ) と (u, v) の座標変換は

$$\begin{aligned} u &= \log \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \\ v &= \theta \end{aligned} \tag{1.26}$$

となります。そして、

$$f(u) = 2 \arctan(e^u) - \frac{\pi}{2} \tag{1.27}$$

ですから、リーマン計量 $g_{S_R^2}$ は、(1.27) を (1.23) に代入すれば

$$g_{S_R^2} = \frac{4R^2}{(e^u + e^{-u})^2} \left(du^2 + dv^2 \right) \tag{1.28}$$

と書けます。u と v の範囲は、それぞれ $-\infty < u < \infty$、$0 < v < 2\pi$ となります。

2　ローレンツ計量の初歩

2.1　ミンコフスキー時空

t を時間、x を縦、y を横、z を高さとして、四つの変数の組 (t, x, y, z) により、時空を考えることができます。とくに、c を光速定数として、計量

$$g = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.1}$$

を定義することにより、g はローレンツ計量となり、ミンコフスキー時空 $(\mathbb{R}^4, g)$ を考えることができます。

相対性理論においては、時間変数 t とは別に固有時間 $\tau \in \mathbb{R}$ というパラメーターを考え、固有時間 τ に対して、事象 $\alpha(\tau)$ を対応させる写像

$$\begin{aligned} t &= \alpha^t(\tau), \\ x &= \alpha^x(\tau), \\ y &= \alpha^y(\tau), \\ z &= \alpha^z(\tau) \end{aligned} \tag{2.2}$$

を定義して, 質点の運動 α を考えることができます。ただ、α は何でもよいわけではなく、

$$\alpha^t(\tau) \text{ は増加関数である} \tag{2.3}$$

ことと、

$$c^2 \left(\frac{d\alpha^t}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\alpha^x}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\alpha^y}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\alpha^z}{d\tau}\right)^2 = c^2 \tag{2.4}$$

の二つを満たさなければなりません。(2.3) と (2.4) の条件を合わせて、運動の条件と呼びます。

ここで、もっとも簡単な等速直線運動をする質点の運動 α を求めてみましょう。簡単のため、$y = z = 0$ に束縛され、二次元 (t, x) の時空を考えることにします。α^t, α^x は、比例定数 a、b によって、

$$\begin{aligned} t &= \alpha^t(\tau) = a\tau, \\ x &= \alpha^x(\tau) = b\tau \end{aligned} \tag{2.5}$$

と書けていると仮定し、a と b を決定しましょう。(2.5) の二つの式で τ を消去して、$x = x(t)$ という軌跡をつくります。v という変数を

$$v := \frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \tag{2.6}$$

で定義します。一方、(2.5) 式を (2.4) に代入すると、

$$c^2 a^2 - b^2 = c^2 \tag{2.7}$$

を得ます。二つの式 (2.6) と (2.7) を a, b を未知数とする連立方定式をみなして解きます。解くと

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ b &= \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

が得られます。結局、求める答えは

$$
\begin{aligned}
t = \alpha^t(\tau) &= \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\
x = \alpha^x(\tau) &= \frac{v\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

となりました。ただし、v は $|v| < c$ を満たす定数で、相対論的速度と呼びます。

2.2 シュヴァルツシルト 時空

シュヴァルツシルト 時空 (M, g) は定数 $a > 0$ によって

$$M := \left\{(t, r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^4 : r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\right\} \tag{2.10}$$

$$g := \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{2.11}$$

と定義されますが、実は、

$$\tilde{M} := \left\{(\tilde{u}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathbb{R}^4 : \tilde{r} > 0, 0 < \tilde{\theta} < \pi, 0 < \tilde{\phi} < 2\pi\right\} \tag{2.12}$$

$$\tilde{g} := \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}}\right) d\tilde{u}^2 - 2d\tilde{u}\, d\tilde{r} - \tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}\, d\tilde{\phi}^2) \tag{2.13}$$

と定義することにより、$(\tilde{M}, \tilde{g})$ はローレンツ多様体となり、写像 $M \to \tilde{M}$ を

$$\tilde{u} = ct + r + a\log\left(\frac{r}{a} - 1\right) \tag{2.14}$$

$$\tilde{r} = r \tag{2.15}$$

$$\tilde{\theta} = \theta \tag{2.16}$$

$$\tilde{\phi} = \phi \tag{2.17}$$

と定義することにより、(M, g) から $(\tilde{M}, \tilde{g})$ へのローレンツ多様体としての埋め込み写像となります。実際、

$$d\tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}dt + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}dr + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\phi}d\phi \tag{2.18}$$

$$d\tilde{r} = \frac{\partial\tilde{r}}{\partial t}dt + \frac{\partial\tilde{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial\tilde{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\tilde{r}}{\partial\phi}d\phi \tag{2.19}$$

$$d\tilde{\theta} = \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t}dt + \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial r}dr + \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\phi}d\phi \tag{2.20}$$

$$d\tilde{\phi} = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}dt + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r}dr + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\phi}d\phi \tag{2.21}$$

を計算すると、

$$d\tilde{u} = c\, dt + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr \tag{2.22}$$

$$d\tilde{r} = dr \tag{2.23}$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta \tag{2.24}$$

$$d\tilde{\phi} = d\phi \tag{2.25}$$

となるので、これらを (2.13) に代入すると、(2.11) が得られます。